Théorème de Liapounov

Théorème
On considère l'équation différentielle

$$(E) : \begin{cases} Y' = f(Y) \\ Y(0) = x_0 \end{cases}$$

avec $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *et* $f(0) = 0$.

Si $Df(0)$ *a ses valeurs propres de partie réelle strictement négative, alors 0 est un point attractif du système différentiel, c'est-à-dire que pour* x_0 *suffisamment proche de 0, on a* $y(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Référence : Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, pp. 138-143.

Démonstration :
La démonstration va s'appuyer principalement sur le lemme suivant :

Lemme
On pose $A = Df(0)$. *Il existe des constantes* $\alpha > 0$ *et* $M > 0$ *telles que* $|||\exp(tA)||| \leq Me^{-\alpha t}$, *avec* $|||\cdot|||$ *définie par :* $|||P||| = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \dfrac{\|Px\|_\infty}{\|x\|_\infty}$.

Démonstration :
On utilise la décomposition de Dunford des matrices A :

$$A = D + N$$

avec D diagonalisable, N nilpotente et D et N commutent. On a donc

$$D = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} \text{ et } e^{tD} = P \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Par définition $\left|\left|\left| \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} \right|\right|\right| \leq \sup\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |e^{t\lambda}|$, or, par hypothèse, les valeurs propres de la matrice A sont de partie réelle strictement négative donc, $\exists \varepsilon > 0, \sup\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \mathrm{Re}(\lambda) \leq -\varepsilon$. Donc

$$|||e^{tD}||| \leq |||P^{-1}||| \left|\left|\left| \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} \right|\right|\right| |||P||| \leq |||P^{-1}||| |||P||| e^{-\varepsilon t} = \underset{t \to +\infty}{O}(e^{-\epsilon t}).$$

Ensuite il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^{p+1} = O_n$ donc $|||e^{tN}||| \leq \sum_{k=0}^{p} \frac{|t^k|}{k!} |||N^k||| = \underset{t\to+\infty}{O}(|t|^p)$.

Finalement $|||e^{tA}||| \leq |||e^{tD}|||e^{tN}||| = \underset{t\to+\infty}{O}(|t|^p e^{-\varepsilon t}) = \underset{t\to+\infty}{O}(e^{-\varepsilon t})$. On pose $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$, il existe alors $M > 0$ tel que $\|e^t\| \leq Me^{-\alpha t}$. ■

On pose maintenant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, b(x,y) = \int_0^\infty \langle e^{tA}x, e^{tA}y\rangle \mathrm{d}t.$$

Vérifions que b est un produit scalaire :

— $|\langle e^{tA}x, e^{tA}y\rangle \leq \|e^{tA}x\|_2 \|e^{tA}y\|_2 \leq M^2 e^{-2\alpha t}\|x\|_2\|y\|_2$. La fonction $t \mapsto \langle e^{tA}x, e^{tA}y\rangle$ est donc intégrable et b est bien définie.

— Par linéarité de l'intégrale b est bilinéaire.

— $b(x,x) = \int_0^\infty \|e^{tA}x\|_2^2 \mathrm{d}t \geq 0$. b est positive.

— $b(x,x) = 0 \Rightarrow \|e^{tA}x\|_2 = 0 \Rightarrow x = 0$. b est définie.

b est donc bien un produit scalaire et on pose $q(x) = b(x,x)$ la forme quadratique associée. $\sqrt{q(x)}$ est donc une norme sur $\mathbb{R}^n$. On a

$$q(x+h) = q(x) + 2b(x,h) + \underbrace{q(h)}_{\underset{h\to 0}{o}(h^2)}.$$

Donc $Dq(x)\cdot h = 2b(x,h)$. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz on a une solution $Y(t)$ de (E) définie sur $\mathbb{R}_+$ et on a

$$q(Y)' = Dq(Y)\cdot Y' = 2b(Y, Y') = 2b(Y, f(Y)).$$

Posons $r(Y) = f(Y) - AY$. On a $q(Y)' = 2b(Y, r(Y)) + 2b(Y, AY)$. Calculons les deux éléments du membre de droite de cette équation :

Par équivalence des normes en dimension finie, on a :

$$2b(Y, AY) = \int_0^\infty 2\langle e^{tA}Y, e^{tA}AY\rangle \mathrm{d}t = \left[\|e^{tA}Y\|_2^2\right]_0^\infty = -\|Y\|_2^2 \leq -kq(Y).$$

$r(Y) = f(Y) - f(0) - Df(0)\cdot Y = \underset{Y\to 0}{o}(Y)$. Donc, par définition d'un petit o, et en utilisant que q est une norme on a $\forall \delta > 0, \exists a > 0, q(Y) \leq a \Rightarrow q(r(Y)) \leq \delta q(Y)$. D'où, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'équivalence des norme en dimension finie

$$2b(Y, r(Y)) \leq 2\sqrt{q(Y)q(r(Y))} \leq 2\sqrt{\delta}q(y).$$

En prenant $\delta < \frac{k^2}{4}$ on a $q(Y) \leq a \Rightarrow q(Y)' \leq -\beta q(Y)$ avec $\beta > 0$.

On suppose $q(x_0) < a$, montrons alors par l'absurde que $Y \leq a$:

Soit $t_0 = \min\{t > 0, q(Y(t)) \geq a\}$, alors $q(Y(t_0)) = a \Rightarrow q(Y)'(t_0) \leq -\beta q(Y) < 0$. Il existe donc $t_1 < t_0$ tel que $q(Y(t_1)) > q(Y(t_0)) \geq a$, ce qui est une contradiction.

Donc $\forall t \geq 0, q(Y(t)) \leq a$. On pose $\varphi(t) = e^{\beta t}q(Y(t))$, $\varphi'(t) = e^{\beta t}(\beta q(Y(t)) + q(Y)'(t)) \leq 0$. Donc

$$\forall t \geq 0, e^{\beta t}q(Y(t)) \leq \varphi(0) = q(x_0) \Rightarrow q(Y(t)) \leq q(x_0)e^{-\beta t}.$$ ■