

Groupes paveurs

Références : Berger, *Géométrie 1*, p 33
 Cours de Madame Dal'Bo sur les pavages
 Boyer, *Algèbre et géométries*, p 314-316

Définition.

On se donne P un compact connexe de \mathbb{R}^2 d'intérieur non vide, et G un sous-groupe de $Is^+(\mathbb{R}^2)$, alors G est un groupe paveur si il vérifie les conditions suivantes :

- $\bigcup_{g \in G} g(P) = \mathbb{R}^2$
- si $g(\overset{\circ}{P}) \cap h(\overset{\circ}{P}) \neq \emptyset \Rightarrow g = h$

Le but ici est d'étudier les groupes paveurs du plan et de montrer qu'il n'y en a que 5 à conjugaison dans $Is^+(\mathbb{R}^2)$ près.¹

On rappelle que $Is^+(\mathbb{R}^2) \simeq \mathbb{R}^2 \rtimes SO_2(\mathbb{R})$ (isomorphisme de groupe) via l'application $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b \mapsto (b, A)$.

On note T l'ensemble des translations (les isométries de partie linéaire nulle) de $Is^+(\mathbb{R}^2)$.

Proposition.

Soit $\Gamma = T \cap G$, alors Γ est un réseau de \mathbb{R}^2 , c'est à dire qu'il existe une base (\vec{u}_0, \vec{v}_0) de \mathbb{R}^2 telle que $\Gamma = t_{\mathbb{Z}\vec{u}_0 + \mathbb{Z}\vec{v}_0}$.

Démonstration. • Si $\Gamma = \{id\}$, alors G ne contient que des rotations. De plus, si deux rotations r, s avaient des centres distincts, alors le commutateur $rsr^{-1}s^{-1}$ serait une translation non triviale (Il suffit de calculer en se rappelant que SO_2 est abélien.). Elles ont donc un même centre ω .

Donc si $P \subset B(\omega, M)$, alors $\forall g \in G, gP \subset B(\omega, M)$. Donc l'axiome premier des groupes paveurs n'est pas respecté.

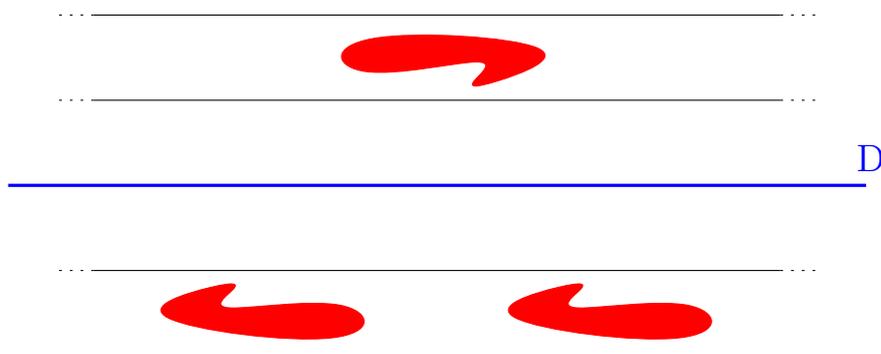
- Soit $t_{\vec{u}} \in \Gamma$, supposons maintenant que $\forall t_{\vec{w}} \in \Gamma, \exists \lambda, \vec{w} = \lambda\vec{u}$.

Soit $r \in G \setminus \Gamma$, alors $rt_{\vec{u}}r^{-1} = t_{\vec{r}(\vec{u})} \in \Gamma$. Donc $\vec{r}(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$, donc r est une symétrie autour d'un point.

Si r et s sont deux symétries autour des points A et B , alors rs est la translation de vecteur $2\vec{AB}$, et donc \vec{AB} est colinéaire à \vec{u} .

Les centres des symétries sont donc sur une même droite D dirigée par \vec{u} . Ainsi $\forall g \in \Gamma, gP$ est soit dans une bande dirigée par \vec{u} et contenant P , soit dans la bande symétrique à la précédente par rapport à D .

Cela contredit l'axiome 1.



1. Attention, il peut y avoir une infinité de pavés différents, c'est juste la manière de recouvrir le plan avec qui va changer !

→ À partir d'ici, tout est à apprendre par cœur.

• Soit $\alpha = \inf\{\|\vec{w}\|, t_{\vec{w}} \in \Gamma \setminus \{t_{\vec{0}}\}\}$, soit $(\vec{w}_n)_n$ une suite de vecteurs telle que $t_{\vec{w}_n} \in \Gamma \setminus \{t_{\vec{0}}\}$ et qui converge vers cet infimum. À partir d'un certain rang, elle est comprise dans une boule $B(0, \alpha + \varepsilon)$, donc quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(\vec{w}_n)_n$ converge (vers \vec{v}).

On pose $g_n = t_{\vec{w}_{n+1}-\vec{w}_n}$, on a $\forall x, g_n(x) = \vec{w}_{n+1} - \vec{w}_n + x \rightarrow x$ donc $g_n \rightarrow id$ simplement. En particulier, pour n grand, $g_n(\dot{P}) \cap \dot{P} \neq \emptyset$, donc g_n est stationnaire à l'identité. Donc \vec{w}_n est stationnaire à \vec{v} . Donc $\vec{v} \in \Gamma$ et $\|v\| = \alpha$.

Il reste cependant le cas où $\alpha = 0$. On voit que si c'est le cas, le deuxième axiome n'est pas vérifié pour une translation trop faible.

• On pose \vec{u}_0 le vecteur réalisant l'infimum. Puis on pose \vec{v}_0 tel que $\|\vec{v}_0\| = \inf\{\|\vec{w}\|, \vec{w} \text{ non colinéaire à } \vec{u}_0, t_{\vec{w}} \in \Gamma\}$. Ce vecteur existe par les mêmes arguments qu'au dessus.

Soit $t_{\vec{w}} \in G$, montrons que $\vec{w} \in \mathbb{Z}\vec{u}_0 + \mathbb{Z}\vec{v}_0$. On a déjà $\vec{w} = a\vec{u}_0 + b\vec{v}_0$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Par translation, on peut supposer $a, b \in [0, 1[$.

→ Si $a = b = 0$, c'est bon.

→ Si $a = 0$ et $b \neq 0$, $\|\vec{w}\| < \|\vec{v}_0\|$, ce qui contredit la minimalité de $\|\vec{v}_0\|$. C'est donc absurde.

→ Il en va de même pour le cas $a \neq 0$ et $b = 0$.

→ Si a et b sont non-nuls, alors

$$\begin{aligned} \|w\|^2 &\leq a^2 \|\vec{u}_0\|^2 + b^2 \|\vec{v}_0\|^2 + 2ab|(\vec{u}_0, \vec{v}_0)| \\ &< a^2 \|\vec{u}_0\|^2 + b^2 \|\vec{v}_0\|^2 + 2ab \|\vec{u}_0\| \|\vec{v}_0\| \text{ (car } \vec{u}_0 \text{ et } \vec{v}_0 \text{ ne sont pas colinéaires)} \\ &< (a^2 + b^2 + 2ab) \|\vec{v}_0\|^2 = (a+b)^2 \|\vec{v}_0\|^2 \end{aligned}$$

On en déduit $\|w\| < (a+b) \|\vec{v}_0\|$, donc $a+b > 1$.

En refaisant le même travail avec $\vec{w}' = (1-a)\vec{u}_0 + (1-b)\vec{v}_0$, on trouve $a+b < 1$, ce qui donne une contradiction et implique donc que $w = 0$.

Γ est donc bien un réseau. □

Théorème.

Pour $G \subset Is^+(\mathbb{R}^2)$, il n'y a que 5 pavages du plan.

On rappelle que deux groupes paveurs G_1 et G_2 sont équivalents si ils sont conjugués dans $Is^+(\mathbb{R}^2)$.²

Démonstration. On appelle L l'application qui à un déplacement de G associe sa partie linéaire dans $SO_2(\mathbb{R})$.

Soit $g \in G$, et $\mathcal{B} = (\vec{u}_0, \vec{v}_0)$ la base (pas forcément orthonormée) de \mathbb{R}^2 associée au réseau Γ .

On a $gt_{\vec{u}_0}g^{-1} = t_{L(g)(\vec{u}_0)} \in \Gamma$. Il en va de même pour v_0 .

On en déduit $\begin{cases} L(g)(\vec{u}_0) &= n_1\vec{u}_0 + m_1\vec{v}_0 \\ L(g)(\vec{v}_0) &= n_2\vec{u}_0 + m_2\vec{v}_0 \end{cases}$ avec $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$.

D'où, $L(g) = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{B} . Il vient $\text{Tr}(L(g)) = 2 \cos(\theta) \in \mathbb{Z}$.

On en déduit la disjonction des cas suivante :

→ soit $\cos(\theta) = -1$ et $L(g) = -id$,

→ soit $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$ et $L(g) = R_{\frac{2\pi}{3}}$,

→ soit $\cos(\theta) = 0$ et $L(g) = R_{\frac{\pi}{2}}$,

→ soit $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$ et $L(g) = R_{\frac{\pi}{3}}$,

→ soit $\cos(\theta) = 1$ et $L(g) = id$.

On a alors $L(G) = \langle R \rangle$ cyclique avec R rotation parmi celles citées ci-dessus.

En effet, on a $L(G) \subset SO_2(\mathbb{R})$ abélien, et si on compose bien deux des rotations du dessus, on obtient des rotations interdites. Par exemple, $R_{\frac{\pi}{3}}R_{\frac{\pi}{2}} = R_{\frac{5\pi}{6}}$ est banni.

On a ainsi 5 types de groupes différents. □

2. Dans le Audin, il est dit à ce sujet : si τ est un élément d'un groupe de transformations G , son conjugué par un élément de G est un élément de même nature géométrique que τ , et les éléments définissant cette nature sont, pour le conjugué de τ par ϕ les images de ceux de τ par ϕ .

Par exemple, $\phi \circ t_{\vec{u}} \circ \phi^{-1} = t_{\phi(\vec{u})}$.

Pour finir, on dessine les 5 types de pavages que voici (image prise dans Berger, *Géométrie*).

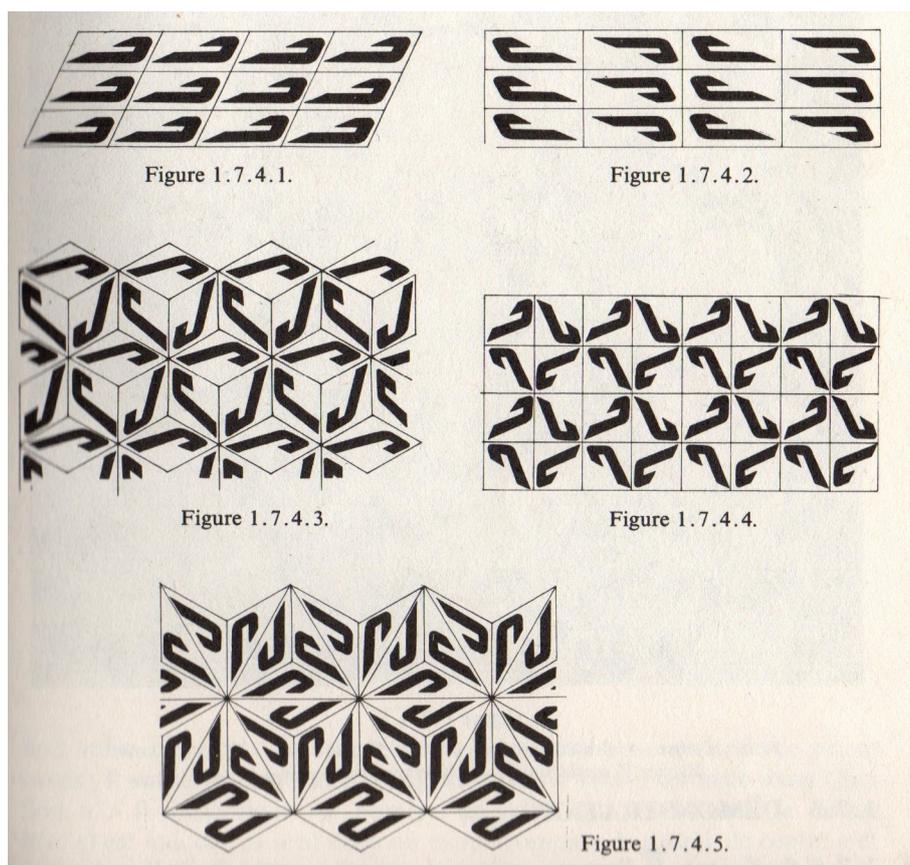


Figure 1.7.4.1.

Figure 1.7.4.2.

Figure 1.7.4.3.

Figure 1.7.4.4.

Figure 1.7.4.5.

Remarques :

- Si on définit le groupe paveur comme un sous groupe de $Is(\mathbb{R}^2)$, on a alors 17 groupes paveurs possibles. La première démonstration de ce fait a été trouvée à Saint-Petersbourg en 1891 par Evgraf Stepanovitch Fedorov (à ne pas confondre avec Stéphane Arkadiévitch Oblonski). On peut trouver des précisions très claires et passionnantes sur le site de Thérèse Eveilleau : http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/jeux_mat/textes/pavage_17_types.htm

- Le palais de l'Alhambra à Grenade est rempli de pavages différents. Il contient 13 des pavages périodiques du plan.

- Il n'y a pas que des pavages périodiques! Même si il est assez difficile de s'imaginer un pavage apériodique, ils existent! On peut citer les pavages de Penrose notamment.

- En cristallographie, on étudie les symétries dans les cristaux avec la déviation de faisceaux lumineux par diffraction. On trouve ainsi des "mailles élémentaires" (notre pavé) et des "groupes d'espace" qui sont exactement nos groupes paveurs (mais en dimension 3). On peut montrer qu'il y a 230 types de groupes d'espace.

- Si on a un groupe paveur G opérant sans point fixe, on peut montrer que $X = \mathbb{R}^2/G$ est une variété différentielle. Pour $L(G) = \langle id \rangle$, on a $G = \mathbb{Z}^2$ et on trouve $X = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ le tore. On peut aussi trouver la bouteille de Klein pour un pavage que nous n'avons pas étudié ici.