1 Billard convexe

Ref : Rouvière largement modifié

THÉORÈME 1.1 *Soit Γ une courbe $\mathcal{C}^1$ du plan affine euclidien E, difféomorphe à un cercle et délimitant un domaine convexe. On peut réaliser le triangle comme trajectoire de billard dans D. (Autrement dit, il existe une trajectoire de billard fermée à trois rebonds).*

PREUVE.

Résumé : On va obtenir cette trajectoire de billard en cherchant le triangle inscrit de périmètre maximal qui existe par compacité. Avec le théorème des extrema liés, on montrera qu'un tel triangle maximal est nécessairement une trajectoire de billard.

Du point de vue du calcul différentiel, E est simplement $\mathbb{R}^2$. Mais on n'aura pas besoin de faire le choix d'un repère orthonormé pour les identifier en tant qu'espace affine euclidien.

Soit $f : \Gamma^3 \subset \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction périmètre définie par :

$$f(A,B,C) = AB + BC + CA$$

Comme Γ est compact ainsi que Γ^3 par Tychonoff (version triviale), et f est continue, f est majorée et atteint son maximum en un triplet (A,B,C). Ce triplet maximal est formé de points distincts car par inégalité triangulaire si $A = B$ par exemple, alors $AC + AC < AC + AM + MC$ dès que M n'est pas sur le segment $[A,C]$. (faire un dessin).

Γ^3 est une sous-variété $\mathcal{C}^1$ de E^3 car c'est un produit de sous-variétés $\mathbb{C}^1$ de E. La fonction f est $\mathbb{C}^\infty$ sur l'ouvert des triplets de points deux à deux distincts car c'est la restriction à une sous-variété d'une fonction $\mathbb{C}^\infty$ sur E^3. Le triplet (A,B,C) est dans cet ouvert donc (par le théorème des extrema liés) $\mathrm{d}f_{(A,B,C)}$ est nulle sur l'espace tangent à Γ^3 en (A,B,C). Regardons ce que cela signifie :

Quand B et C sont fixés, en posant $g(A) = f(A,B,C) = AB + BC + CA$. On a pour u vecteur tangent à Γ en A :

$$\mathrm{d}g_A(u) = < \frac{\vec{BA}}{BA} + \frac{\vec{CA}}{CA}, u >$$

Mais on a aussi :

$$\mathrm{d}g_A(u) = \mathrm{d}f_{(A,B,C)}(u,0,0) = 0$$

car $(u,0,0)$ est tangent à Γ^3 au point (A,B,C).

Ainsi $\frac{\vec{BA}}{BA} + \frac{\vec{CA}}{CA}$ est orthogonal à Γ, et c'est justement dire que c'est une réflexion sur un billard selon la loi de Descartes. (faire un dessin)

Le même raisonnement est valable aussi pour B et C, donc le triangle ABC est une trajectoire de billard à l'intérieur de Γ.

$\square$

Remarques :

1. Ici courbe désigne "sous-variété de dimension 1".
2. En particulier c'est vrai pour un cercle, une ellipse, un polygônes avec les coins arrondis.
3. Le même raisonnement marche pour un polygones à n côtés. Mais rien n'assure que ce polygone n'est pas aplati (penser à un diamètre sur un disque qui réalise des trajectoires de périmètre maximal pour un nombre pair de côtés)

Leçons concernées : problème d'extremum, sous-variétés, application différentiables, problème d'angle et de distance, compacité.