

Borne de Bézout

Leçons : 142, 144, 152

Théorème 1

Soit k un corps infini et $A, B \in k[X, Y]$ de degrés totaux respectifs m et n . Alors si $Z(A)$ désigne l'ensemble des zéros de A , on a $\text{Card}(Z(A) \cap Z(B)) \leq mn$.

Démonstration. Étape 1 : majoration du degré d'un résultant

On sait que si $(x, y) \in Z(A) \cap Z(B)$, on a $\text{Res}_X(A, B)(y) = \text{Res}_Y(A, B)(x) = 0$, donc $\text{Card}(Z(A) \cap Z(B)) \leq \deg \text{Res}_X(A, B) \times \deg \text{Res}_Y(A, B)$.

Écrivons $A = \sum_{i=0}^p a_i(X)Y^i$, $B = \sum_{j=0}^q b_j(X)Y^j$ où pour tout i , $\deg a_i \leq m - i$, pour tout j , $\deg b_j \leq n - j$.

Le résultant $\text{Res}_Y(A, B)$ est le déterminant de la matrice de Sylvester

$$C = (c_{i,j})_{1 \leq i, j \leq p+q} = \begin{pmatrix} a_0 & (0) & b_0 & & (0) \\ & \ddots & & & \ddots \\ \vdots & & a_0 & \vdots & \\ a_p & & \vdots & b_q & \\ & \ddots & & \ddots & \vdots \\ (0) & & a_p & (0) & b_q \end{pmatrix}$$

où si $1 \leq j \leq q$, $c_{i,j} = \begin{cases} a_{i-j} & \text{si } 0 \leq i-j \leq p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

et si $q+1 \leq j \leq p+q$, $c_{i,j} = \begin{cases} a_{i-j+q} & \text{si } 0 \leq i-j+q \leq p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Donc $\text{Res}_Y(A, B) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{p+q} c_{\sigma(j), j}$. Or, si $\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}$,

$$\deg \left(\prod_{j=1}^{p+q} c_{\sigma(j), j} \right) = \sum_{j=1}^{p+q} \deg(c_{\sigma(j), j}) \leq \sum_{j=1}^q m - (\sigma(j) - j) + \sum_{j=q+1}^{p+q} n - (\sigma(j) - j + q) = (m-p)(q-n) + mn \leq mn$$

puisque $q \leq n$ et $p \leq m$.

Donc $\deg \text{Res}_Y(A, B) \leq mn$, et symétriquement, il en va de même de $\text{Res}_X(A, B)$. Ainsi, $\text{Card}(Z(A) \cap Z(B)) \leq (mn)^2$

Étape 2 : changement de variable astucieux

Notons $Z(A) \cap Z(B) = \{(x_i, y_i), i \in I\}$, I fini. Soit $\mathcal{E} = \left\{ \frac{x_i - x_j}{y_j - y_i}, i \neq j, y_j \neq y_i \right\}$ qui est également fini.

Soit $u \in k^* \setminus \mathcal{E}$ (k est infini). Si $i \neq j \in I$, $x_i + uy_i = x_j + uy_j \Leftrightarrow x_i - x_j = u(y_j - y_i) \Leftrightarrow u = \frac{x_i - x_j}{y_j - y_i}$ ou $(x_i, y_i) = (x_j, y_j)$ ce qui est faux car $u \notin \mathcal{E}$.

Donc $\varphi : (x, y) \in Z(A) \cap Z(B) \mapsto x + uy$ est injective.

1. pour s'en souvenir, examiner les éléments en bas à droite des deux moitiés de la matrice correspondant à A et B

Posons $\tilde{A}(X, Y) = A(X - uY, Y)$ et $\tilde{B}(X, Y) = B(X - uY, Y)$. Si $(x, y) \in Z(A) \cap Z(B)$, $\tilde{A}(x + uy, y) = A(x, y) = 0$ et $\tilde{B}(x, y) = 0$, d'où $\text{Res}_Y(\tilde{A}, \tilde{B})(x + uy) = 0$.

Ainsi, φ est à valeurs dans l'ensemble des racines de $\text{Res}_Y(\tilde{A}, \tilde{B})$. Selon l'étape 1, comme \tilde{A} et \tilde{B} sont de degrés totaux inférieurs à ceux de A et B , on a $\text{Card}(Z(A) \cap Z(B)) \leq mn$. □

Remarque. Le "vrai" théorème de Bézout affirme que le nombre de points d'intersections des courbes algébriques définies par A et B est égal à mn , à condition de les compter avec une notion de "multiplicité" à définir.

Références : bricolé (merci à Adrien Laurent) à partir de :

- Jean-Yves MÉRINDOL (2006). *Nombres et algèbre*. EDP Sciences
- Aviva SZPIRGLAS (2009). *Mathématiques L3*. Pearson Education