

Banach-Steinhaus et séries de Fourier

Leçons : 205, 208, 209, 241, 246

Théorème 1

Soit E espace de Banach, F espace vectoriel normé, $H \subset \mathcal{L}_c(E, F)$. Alors soit il existe M tel que $\forall f \in H, \|f\| \leq M$, soit l'ensemble des $x \in E$ tels que $\sup_{f \in H} \|f(x)\| = +\infty$ est dense dans E .

Démonstration. Introduisons pour $k \in \mathbb{N}$, $\Omega_k = \{x \in E : \exists f \in H, \|f(x)\| > k\}$. Le complémentaire de cette ensemble étant fermé comme intersection de fermés, Ω_k est ouvert. Si $\Omega = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \Omega_k$, on remarque que $\forall x \in \Omega, \sup_{f \in H} \|f(x)\| = +\infty$.

Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que Ω_k ne soit pas dense. Il existe $x_0 \in E, r > 0$ tel que $B(x_0, r) \cap \Omega_k = \emptyset$. Si $\|x\| < r$ et $f \in H$, alors $\|f(x + x_0)\| \leq k$ donc $\|f(x)\| \leq k + \|f(x_0)\|$.

$$\text{Donc si } \|x\| \leq 1, \|f(x)\| = \left\| \frac{2}{r} f\left(\frac{rx}{2}\right) \right\| \leq \frac{2k}{r} + \frac{2}{r} \|f(x_0)\|.$$

$$\text{Ainsi, } \|f\| \leq \frac{2k}{r} + \frac{2}{r} \|f(x_0)\|$$

Sinon, tous les Ω_k sont denses donc selon le théorème de Baire, Ω est dense dans l'espace complet E donc l'ensemble des $x \in E$ tels que $\sup_{f \in H} \|f(x)\| = +\infty$, qui le contient, également. □

Proposition 2

L'ensemble des fonctions continues 2π -périodiques dont la série de Fourier diverge en 0 est dense dans $\mathcal{C}_{2\pi}^0$.

Démonstration. Rappelons que $\mathcal{C}_{2\pi}^0$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach.

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $l_n : \mathcal{C}_{2\pi}^0 \rightarrow \mathbb{C}$

$$f \mapsto S_n(f)(0) = \sum_{k=-n}^n c_k(f)$$

Pour tout $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$, $l_n(f) = (f \star D_n)(0) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} f(t) dt$ donc $|l_n(f)| \leq$

$\|D_n\|_1 \|f\|_\infty$ de sorte que $\|l_n\| \leq \|D_n\|_1$.

Pour $\varepsilon > 0$, soit $f_\varepsilon : t \rightarrow \frac{|D_n(t)|}{|D_n(t)| + \varepsilon} \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$. Alors par convergence dominée, comme $\forall \varepsilon, \forall t, |f_\varepsilon(t)| \leq 1$,

$$l_n(f_\varepsilon) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|D_n(t)|^2}{|D_n(t)| + \varepsilon} dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|l_n\| = \|D_n\|_1$.

Or, il découle de l'inégalité $\sin t \leq t$, valable pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, que

$$\|D_n\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2}{|t|} \left| \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) \right| dt \geq 2 \int_0^{\pi} \frac{|\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)|}{|t|} dt \geq \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin u|}{u} du$$

Donc $\|D_n\|_1$ tend en croissant vers $\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\sin u|}{u} du$, par convergence monotone. Mais $\varphi : u \mapsto \frac{|\sin u|}{u} du$ n'est pas intégrable. En effet, elle est périodique de moyenne $M = \int_0^{2\pi} \varphi(u) du > 0$ donc $\int_0^{2\pi n} \varphi(u) du = nM \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ alors que dans le même temps, toujours par convergence monotone, cette suite tend vers $\int_{\mathbb{R}_+} \varphi(u) du$.

En conclusion, le premier cas de l'alternative du théorème de Banach-Steinhaus ne pouvant être réalisée, il s'ensuit que l'ensemble des $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$ tels que $(l_n(f))_n$ n'est pas bornée est dense dans $\mathcal{C}_{2\pi}^0$. \square

Remarque. Dans l'alternative du théorème de Banach-Steinhaus, le premier cas est en particulier réalisé quand il existe $x \in E$ tel que $\sup_{f \in H} \|f(x)\| < +\infty$.

Référence : Walter RUDIN (1970). *Real and complex analysis*. 3^e éd. McGraw-Hill series in higher mathematics. ; International student edition. McGraw-Hill, p. 130