Leçon 106 - Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de Gl(E). Applications.

Cadre : E est un K-ev de dimension finie.

1. Groupe linéaire et groupe spécial linéaire. —

1. Généralités. —

- Def : $GL(E)$ est l'ensemble des isomorphismes linéaies de E.
  $Gl_n(K)$ est l'ensemble des matrices de $M_n(K)$ inversibles.
- Pro : Pour B une base de E, l'application $f \in GL(E) \mapsto Mat(f,B) \in Gl_n(K)$ est un isomorphisme de groupes.
- Pro : Soit $f \in End(E)$. $f \in GL(E)$ ssi f injective ssi f surjective ssi $det(Mat(f,B)) \neq 0$ ssi f envoie une base sur une base.
- Rem : Cela est faux en dimension infinie.
- Pro+Def : Les applications $f \mapsto det(Mat(f,B))$ et $f \mapsto Tr(Mat(f,B))$ ne dépendent pas du choix de la base de f. On peut ainsi définir $det(f)$ et $Tr(f)$ pour tout $f \in End(E)$.
- Pro+Def : $det : GL(E) \to K^*$ est un morphisme de groupes. On note $Sl_n(K)$ son noyau.
- Ex : Pour p premier et $q = p^r$, on a $Card(GL_n(\mathbb{F}_q)) = (q^n-1)..(q^n-q^{n-1}) = (q^n-1)..(q-1).q^{\frac{n(n-1)}{2}}$.
  Et $Card(Sl_n(\mathbb{F}_q)) = (q^n-1)..(q^2-1).q^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

2. Générateurs. —

- Pro+Def : Soit H un hyperplan de E et $u \in GL(E)$ tq $u|_H = Id_H$.
  On a l'équivalence :
  i) $det(u) = \lambda \neq 1$. (càd $u \notin SL(E)$)
  ii) u admet une valeur propre $\lambda \neq 1$. (donc une droite propre)
  iii) $Im(u-Id) \nsubseteq H$.
  iv) Dans une base convenable, la matrice de u est $Diag(1,..,1,\lambda)$ pour $\lambda \neq 1$.
  On dit alors que u est une dilatation d'hyperplan $H = Ker(u-Id)$, de droite $D = Im(u-Id)$ et de rapport λ.
- Pro+Def : Soit H un hyperplan de E d'équation $f \in E^*$ et $u \in GL(E)$ tq, $u \neq Id_E$ $u|_H = Id_H$. On a l'équivalence :
  i) $det(u) = 1$. (càd $u \in SL(E)$)
  ii) u n'est pas diagonalisable.
  iii) $D = Im(u-Id) \subset H$.
  iv) Le morphisme induit $\overline{u} : E/H \to E/H$ est l'identité de E/H.
  v) Il existe $a \in H - \{0\}$ tel que pour tout $x \in E$, $u(x) = x + f(x).a$.
  vi) Dans une base convenable, u a pour matrice (une matrice de transvection).
  On dit alors que u est une transvection d'hyperplan H et de droite D.
- Thm : Les transvections sont toutes conjuguées dans $SL(E)$ et engendrent $SL(E)$.
- Cor : Les transvections et les dilatations engendrent $GL(E)$. .
- App : Le centre de $Gl_n(K)$ est l'ensemble des matrices $\lambda.I_n$. Il est isomorphe au groupe K^*.
  Le centre de $Sl_n(K)$ est l'ensemble des matrices $\lambda.I_n$ avec $\lambda^n = 1$. Il est isomorphe au groupe des racines n-ièmes de l'unité dans K.
- App : 1) On a $D(Gl_n(K)) = Sl_n(K)$ pour $n \geq 3$ et $car(K) \neq 2$.
  2) On a $D(Sl_n(K)) = Sl_n(K)$ pour $n \geq 3$ et $car(K) \neq 2$

2. Quelques sous-groupes de $GL(E)$. —

1. Groupes orthogonaux. —

Ici, E est un ev euclidien de dimension n.

- Def : L'ensemble des isométries linéaires de E est un groupe appelé groupe orthogonal et noté $O(E)$.
- Pro : L'ensemble $SO(E) := O(E) \cap det^{-1}(\{1\})$ est un sous-groupe distingué de $O(E)$ appelé groupe spécial orthogonal.
- Pro+Def : Soit $u \in Gl(E)$ tq $u^2 = Id$. Alors pour $E_1 = Ker(u+Id)$, $E_2 = Ker(u-Id)$, on a $E = E_1 \oplus E_2$, et $u|_{E_1} = -Id_{E_1}$, $u|_{E_2} = Id_{E_2}$.
  Si $u \neq id$, on dit que u est une involution (ou symétrie).
  Si $dim(Ker(u+Id)) = 1$ (resp 2) on dit que u est une réflexion (resp un renversement).
- Pro : Soit u une involution. u est une isométrie ssi $E_1 \perp E_2$.
- Thm : Le groupe $O(E)$ est engendré par les réflexions orthogonales.
  Tout $u \in O(E)$ est produit d'au plus n réflexions.
- Rem : Si $u \in SO(E)$, u est produit d'un nombre pair de réflexions.
- Thm : Pour $n \geq 3$, $SO(E)$ est engendré par les renversements orthogonaux.
  Tout $u \in SO(E)$ est produit d'au plus n renversements.
- Lem : Soit $n \geq 3$ et τ, τ' des réflexions. Alors il existe des renversements σ, σ' tels que $\tau.\tau' = \sigma.\sigma'$.
- App : Pour $n \geq 2$, on a $D(O(E)) = SO(E)$.
  Pour $n \geq 3$, on a $D(SO(E)) = SO(E)$.
- Rem : Pour $n = 2$, $SO(E)$ est commutatif et on a $D(SO(E)) = \{Id\}$.
- App : Le groupe $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.
- Pro : $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

2. Sous-groupes finis. —

- Def : Soit B la base canonique de K^n. Pour tout $\sigma \in \Sigma_n$ on définit T_σ la matrice dont le coefficient (i,j) vaut 1 si $i = \sigma(j)$ et 0 sinon, et on l'appelle matrice de permutation associée à σ.
- Pro : $\sigma \in \Sigma_n \mapsto T_\sigma \in Gl_n(K)$ définit un morphisme de groupes injectif.
- Pro : On a $det(T_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$.
- Pro : Pour G un groupe fini, l'application $g \mapsto (x \mapsto g.x.g^{-1}$ est un morphisme de groupes injectif de G vers $\Sigma_{Card(G)}$.
  On a ainsi un morphisme de groupes injectif de G vers $Gl_{Card(G)}(K)$.

- Pro : Pour $K = \mathbb{F}_p$, le sous-groupe $UT_n(\mathbb{F}_p)$ des matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale est de cardinal $p^{\frac{n(n-1)}{2}}$.
  C'est donc un p-Sylow de $Gl_n(\mathbb{F}_p)$.
- App : Premier théorème de Sylow : Pour G groupe fini de cardinal n, avec $n = p^r n'$, G possède un p-Sylow.
- **Dev** : Théorème de Brauer : Soit K un corps de caractéristique quelconque, $n \geq 1$, et $\sigma, \sigma' \in \Sigma_n$.
  Alors σ et σ' sont conjuguées si et seulement si leurs matrices de permutation $T_\sigma, T_{\sigma'}$ sont semblables dans $Gl_n(K)$.
- Théorème de Burnside : Un sous-groupe de $Gl_n(K)$ d'exposant fini est fini.

3. Action de $GL(E)$ et de ses sous-groupes. —

1. Sur les sous-espaces vectoriels de E. —

- Def : On fait agir $GL(E)$ sur E à gauche par $f.x = f(x)$.
  Pour $k \leq n$ on fait agir $GL(E)$ sur l'ensemble des s-ev de dimension k par $f.V = f(V)$.
- Pro : Ces actions sont transitives.
  La restriction de ces actions à $SL(E)$ reste transitive.
- Pro : Si E est euclidien, la restriction de ces action à $SO(E)$ reste transitive.
- Def : Drapeau.
- Pro : On fait agir $GL(E)$ sur l'ensemble des drapeaux par translation à gauche.
  Cette action est transitive.
  Si E est euclidien, la restriction de cette action à $SO(E)$ reste transitive.

2. Sur $P(E)$. —

- Def : La relation $xRy \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}$ tq $x = \lambda y$ est une relation d'équivalence sur $E^2 - \{0\}$.
  On définit $P(E) := (E^2 - \{0\})/R$, et on note $dim(P(E)) = dim(E) - 1$.
  On note $P_1(\mathbb{K}) := P(\mathbb{K}^2)$ la droite projective sur $\mathbb{K}$.
- Pro+Def : On peut faire agir $GL(E)$ sur $P(E)$ par translation à gauche.
  On note $PGL(E)$ l'image de $GL(E)$ dans $Bij(P(E))$ par le morphisme lié à l'action de translation à gauche. On note de même $PSL(E)$ l'image de $SL(E)$ dans $Bij(P(E))$ par ce morphisme.
- Pro : Le noyau du morphisme associé à l'action est $K^*.Id_E$.
  Le noyau de la restriction de de morphisme à $SL(E)$ est $U_{K,n}.Id_E$.
- App : Pour p premier et $q = p^r$, on a ainsi $Card(PGl_n(\mathbb{F}_q)) = \frac{Card(Gl_n(\mathbb{F}_q)}{q-1}$ et $Card(PSl_n(\mathbb{F}_q)) = \frac{Card(Sl_n(\mathbb{F}_q)}{pcgd(q,n)}$.

3. Sur les espaces de matrices. —

- Def+Pro : $A, B \in M_n(K)$ sont dite équivalentes ssi il existe $P, Q \in Gl_n(K)$ tq $A = PBQ^{-1}$. Cette relation est une relation d'équivalence sur $M_n(K)$.
- Pro : Les orbites de cette action sont les ensembles de matrices de même rang.
- App : Dénombrement de l'ensemble des matrices de $M_{n,p}(\mathbb{F}_q)$ de rang r.
- Rem : Pour $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ces orbites ne sont pas fermées : Il existe des matrices de rang r aussi proches que l'on veut de la matrice nulle. Ainsi, le rang n'est pas continu.
- Def+Pro : $A, B \in M_n(K)$ sont dites semblables ssi il existe $P \in Gl_n(K)$ tq $A = P.B.P^{-1}$. Cette relation est une relation d'équivalence sur $M_n(K)$.
- Pro : det, Tr, $rang$, χ_A, μ_A, sont invariants par similitude.
- Thm de réduction de Frobenius.
- App : Caractérisation des classes de similitudes de $M_2(\mathbb{R})$ et $M_3(\mathbb{R})$.
- Def+Pro : $A, B \in M_n(K)$ sont dites congruentes ssi il existe $P \in Gl_n(K)$ tq $A = P.B.P^t$. Cette relation est une relation d'équivalence sur $M_n(K)$.
- Rem : Pour q une forme quadratique sur K de forme polaire A, les formes quadratiques équivalentes à q sont les formes quadratiques dont la forme polaire B est congruente à A.
- Pro : Soit K tq $car(K) \neq 2$ et q une forme quadratique sur E, de forme polaire b. Alors la matrice de b dans la base canonique est congruente à une matrice diagonale.
- Théorème d'inertie de Sylvester : Si $K = \mathbb{R}$ et q est une forme quadratique dont la forme polaire est de rang r, alors on a un $0 \leq p \leq r$ tel que q soit équivalente à $x \mapsto x_1^2 + \cdots + x_p^2 - (x_{p+1}^2 + \cdots + x_r^2)$.
  On dit alors que q est de signature $(p, r-p)$ et ce couple ne dépend que de q.

4. Aspects topologiques pour $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. —

On munit $M_n(K)$ d'une norme et on regarde la topologie associée à celle-ci.

1. Densité. —

- Pro : $Gl_n(K)$ est dense dans $M_n(K)$.
- App : Pour tout corps L, $\forall A, B \in M_n(L)$, on a $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
- App : det est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$, de différentielle : $D_A det(H) = Tr(com(A)^t.H)$.

2. Connexité et compacité. —

- Pro : $Gl_n(\mathbb{C})$ est connexe. $O_n(\mathbb{R})$ et $Gl_n(\mathbb{R})$ ont deux composantes connexes.
  $SO_n(\mathbb{R})$ et $Sl_n(\mathbb{R})$ sont connexes.
- Pro : $O_n(\mathbb{R})$,$SO_n(\mathbb{R})$ sont compacts.
- App : $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.
- App : Décomposition polaire : Pour tout $A \in Gl_n(\mathbb{R})$, il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $A = OS$.
  Cette décomposition est unique, et est un homéomorphisme.
- **Dev** : $exp : M_n(\mathbb{C}) \to Gl_n(\mathbb{C})$ est surjective.
  De plus, $exp(M_n(\mathbb{R})) = \{A^2,\ A \in Gl_n(\mathbb{R})\}$.
- App : $Gl_n(\mathbb{K})$ n'a pas de sous-groupes arbitrairement petits (inclus dans des boules de taille arbitrairement petites)

Références

Perrin : Groupe linéaire, propriétés, déterminant, calcul de cardinaux. Dilatations, transvections, générateurs, propriétés, groupes dérivés. Groupe orthogonal, involutions, réflexions, génération, groupes dérivés, applications. $UT_n(\mathbb{F}_p)$, premier théorème de Sylow. Cardinal de $PGL(\mathbb{F}_q)$.
Gourdon : Conditions pour f biective. Action par conjugaison, invariants de similitude, Th de Frobenius, caractérisation des classes de similitude en dim 2,3.
Ulmer : Centres de $GL(E)$,$SL(E)$. Espace projectif, action de $GL(E)$,$SL(E)$, def de PGL,PSL.
Caldero, Germoni : Relation par équivalence, orbites, propriétés. Action par congruence, lien avec les formes quadratiques, diagonalisation, Th de Sylvester. O_n compact, décomposition polaire, $SO_3(\mathbb{R})$ simple.
Mneimé, Testard : Densité de $Gl_n(K)$, applications. Connexité pour Gl_n,O_n,SO_n,Sl_n.
Objectif Agrégation : Matrice de permutation, morphismes.
Zavidovique : Surjectivité de l'exponentielle.(Dev)
Sans Ref : Th de Brauer.(Dev)
FGN (Algèbre 1) : Drapeau, action matricielle sur les drapeaux.
FGN (Algèbre 2) : Th de Burnside.
Rouvière : Différentielle du déterminant.

June 7, 2017

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes