Théorème de Riesz-Fischer

Nico

Prérequis : Connaissance des espaces L^p, théorie de la mesure, lemme de Fatou, théorème de convergence monotone.

Notations :

1. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré (on gardera en tête les exemples de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \lambda)$ où $\mathcal{B}$ est la tribu borélienne, et λ la mesure de Lebesgue, $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ où μ est la mesure de comptage, et $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ où $\mathbb{P}$ est une mesure de proba)
2. $L^p = \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} : \int_X |f| d\mu\} / \sim$ pour $1 \leq p < \infty$, où $f \sim g$ ssi $f = g$ presque partout.
3. $L^\infty = \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} : \exists M \in \mathbb{R}_+^*,\ |f| \leq M\} / \sim$
4. On munit L^p de la norme [(1)] $||\cdot||_p$ définie pour $f \in L^p$:

$$||f||_p = \begin{cases} \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \inf\{M \geq 0 : |f| \leq M \text{ pp}\} & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

On rappelle deux théorèmes centraux du développement :

Thm 1 (Convergence monotone)**.** *Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions mesurables sur X à valeurs positives. Alors $f := \lim f_n$ est mesurable, et*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

Thm 2 (Lemme de Fatou)**.** *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables sur X à valeurs positives. Alors :*

$$\int_X \liminf_{n \to +\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \to +\infty} \int f_n d\mu$$

On énonce maintenant le théorème centrale du développement :

Théorème de Riesz Fischer : L'espace $(L^p, ||\cdot||_p)$ est complet.

(1). savoir justifier qu'il s'agit d'une norme...

Soit $p \in [1, \infty]$, $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de L^p. On souhaite montrer que $(f_n)_n$ converge dans L^p, on va suivre ce procédé :

i) Trouver une limite simple de $(f_n)_n$, notée f

ii) Montrer que $||f_n - f||_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

iii) Conclure en montrant que $f \in L^p$

On énoncera deux preuves différentes, selon si $p = \infty$ ou si $p < \infty$. On commence par le cas L^∞ est complet :

Démonstration. On pose pour $k \in \mathbb{N}$, $A_k := \{x \in X : |f_k(x)| \geq ||f_k||_\infty\}$ et pour $n, m \in \mathbb{N}$, $B_{n,m} := \{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > ||f_n - f_m||_\infty\}$. Pour tout $k, n, m \in \mathbb{N}$, $||f_k||_\infty < \infty$, donc par définition de la norme infini : A_k et $B_{n,m}$ sont de mesure nulle. Donc $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} B_{n,m}$ est de mesure nulle comme réunion dénombrable de mesure nulle [(2)].

i) Soit $x \in X\backslash E$, alors $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall k, n, m \geq N$, $|f_k(x)| < ||f_k||_\infty$, donc $(f_n(x))_n$ est bornée, et $|f_n(x) - f_m(x)| \leq ||f_n - f_m||_\infty$. Or $(f_n)_n$ est de Cauchy dans L^∞, donc $|f_n(x) - f_m(x)| \xrightarrow[n,m\to+\infty]{} 0$. Donc $(f_n(x))_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Par complétude de $\mathbb{R}$, $(f_n(x))_n$ converge dans $\mathbb{R}$. Notons l_x sa limite. On définit alors la fonction f par :

$$f(x) = l_x \text{ si } x \in X\backslash E,\ f(x) = 0 \text{ si } x \in E$$

On a que $(f_n)_n$ converge simplement presque partout [(3)] vers f.

ii) Montrons que $(f_n)_n$ converge vers f pour $||\cdot||_\infty$.
Soit $\varepsilon > 0$,
Puisque $(f_n)_n$ est de Cauchy dans L^∞, on fixe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $||f_n - f_m|| \leq \varepsilon$.
Soit $x \in X\backslash E$, alors pour tout $n, m \geq N$, $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$. Pour $m \to +\infty$, on a que $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Cette inégalité étant vraie pour presque tout x dans X, on a que $||f_n - f||_\infty \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. D'où la convergence souhaitée.

iii) Soit $x \in X\backslash E$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(x)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)|$ Soit alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $||f - f_N||_\infty \leq 1$, il vient que $|f(x)| \leq 1 + ||f_N||_\infty < \infty$. D'où par f est bornée sur $X\backslash E$ (et même sur X tout entier). D'où $f \in L^\infty$.

---

(2). $\mu(E) \leq \sum_{k,n,m\in\mathbb{N}} \mu(A_k)\mu(B_{n,m}) = 0$

(3). limite valable qu'en dehors de E, qui est de mesure nulle.

□

On énonce maintenant le cas $p < \infty$.

Démonstration. Pour créer notre limite simple, on ne peut pas faire comme avant. On va exprimer $f_n(x)$ comme une série de fonction, et montrer qu'elle converge. L'idée est de poser $f_n(x) = f_0(x) + \sum_{k=0}^{n-1} f_{k+1}(x) - f_k(x)$. On montrera que le membre de droite converge en montrant une convergence absolue.

i) Puisque $(f_n)_n$ est de Cauchy, on peut extraire une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_n$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $||f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}||_p \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (4). On définit alors la suite de fonctions $(g_n)_n$ sur X par $g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} |f_{\varphi(k+1)}(x) - f_{\varphi(k)}(x)|$. Par somme de termes positifs, pour tout $x \in X$, $(g_n(x))_n$ est positive et croissante. Donc soit elle converge dans $\mathbb{R}$, soit elle diverge vers $+\infty$. On définit alors la fonction g par $g(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x) \in \overline{\mathbb{R}}$.
Par Minkovsky (inégalité triangulaire de $||\cdot||_p$) :

$$||g_n||_p \leq \sum_{k=0}^{n} ||f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}||_p \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^{k+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \leq 2$$

D'où $(g_n)_n$ est dans L^p. Or $(g_n)_n$ converge simplement vers g, et $(g_n)_n$ est une suite croissante de fonctions positives mesurables. Donc par le théorème de convergence monotone, g est mesurable et $||g_n||_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} ||g||_p$ par continuité de $x \mapsto x^{\frac{1}{p}}$. Puisque $(||g_n||_p)_n$ est majorée par 2, $||g||_p \leq 2$. D'où $g \in L^p$. Donc il existe E de mesure nulle telle que $|g|$ est finie sur $X\backslash E$ (5).
On considère alors $h_n(x) = f_{\varphi(0)} + \sum_{k=0}^{n} f_{\varphi(k+1)}(x) - f_{\varphi(k)}(x)$. $(h_n(x))_n$ converge pour $x \in X\backslash E$ car $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_{\varphi(k+1)}(x) - f_{\varphi(k)}(x)$ converge absolument dans $X\backslash E$ car g est finie dans $X\backslash E$. Notons l_x la limite de $h_n(x)$ dans $X\backslash E$. On considère alors la fonction f :

$$f(x) = l_x \text{ si } x \in X\backslash E,\ f(x) = 0 \text{ si } x \in E$$

(4). Soit $\varepsilon_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, il existe N_n tel que pour tout $m \geq N_n$, $||f_{N_n} - f_m||_p \leq \varepsilon_n$. On construit alors par récurrence l'ensemble $A_n = \{N \in \mathbb{N} : \forall m \geq N,\ ||f_N - f_m||_p \leq \varepsilon_n\}$ et $\varphi(0) = \min A_0$, $\varphi(n+1) = \min\{N : N \in A_{n+1}, N > \varphi(n)\}$.

(5). on s'est embêtés à montrer tout ça pour avoir que $|g|$ est finie presque partout. C'est essentiel pour avoir la convergence absolue de la suite $(h_n)_n$.

On a que $(f_{\varphi(n)})_n$ converge simplement dans $X \backslash E$ vers f.

ii) Soit $\varepsilon > 0$.
Comme $(f_n)_n$ est de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $||f_n - f_m||_p \leq \varepsilon,\ \forall n, m \geq N$. Soit $n \geq N$. On utilise le lemme de Fatou :

$$||f_n - f||_p^p = \int_X \liminf_{m \to +\infty} |f_n - f_{\varphi(m)}|^p \leq \liminf_{m \to +\infty} ||f_n - f_m||_p^p \leq \varepsilon^p$$

D'où $\forall n \geq N$, $||f_n - f||_p \leq \varepsilon$. D'où la convergence dans L^p souhaitée.

iii) Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $||f_N - f||_p \leq 1$. Alors $||f_N - f||_p \leq 1$. D'où $f_N - f \in L^p$. Or $f_N \in L^p$, d'où puisque L^p est un espace vectoriel, $f \in L^p$.

□

De la preuve découle un autre résultat important :

$f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{L^p} f \implies \exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante tq $(f_{\varphi(n)})_n$ converge simplement presque partout vers f.

Puisque converge implique Cauchy, et que toute suite de Cauchy vérifie ce résultat.

Référence

Isenmann, Lucas (2024). *L'oral à l'agrégation de mathématiques*. ellipses, p. 396.

Recasages

Leçon 201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.
Leçon 205 : Espaces complets. Exemples et applications.
Leçon 208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.
Leçon 234 : Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.
Leçon 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.