Suites de polygones

Théorème. Soit P un polygone à n sommets représenté par un vecteur de $\mathbb{C}^n$ des affixes des sommets de P. On définit par récurrence une suite de polygones (P_k) avec $P_0 = P$ et où les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arêtes de P_k. Alors (P_k) converge vers l'isobarycentre de P.

Lemme. (Déterminant circulant)

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice circulante donnée par

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{bmatrix}$$

Si on pose $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1}$ et $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$ alors $\det(A) = \prod_{i=0}^{n-1} P(\omega^i)$.

Preuve du lemme.

On considère la matrice $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, alors

par un simple calcul, on obtient pour $k \in [\![0, n]\!]$,

$J^k = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-k} \\ I_k & 0 \end{bmatrix}$ et donc $A = a_0 J^0 + a_1 J + \cdots + a_{n-1} J^{n-1} = P(J)$.

Par le calcul précédent, on a $J^n = I$, de sorte que le polynôme $X^n - 1$ qui est scindé et à racines simples annule J. Ainsi, J est diagonalisable avec

$$\mathrm{sp}(J) \subseteq \{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}\}$$

Diagonalisons J : le système $Jx = \omega^i x$, pour un $i \in [\![0, n-1]\!]$ est :

$$\begin{cases} x_2 = \omega^i x_1 \\ x_3 = \omega^i x_2 \\ \vdots \\ x_1 = \omega^i x_n \end{cases} \quad \text{ce qui est équivalent à} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ \omega^i \\ \omega^{2i} \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)i} \end{bmatrix} \right)$$

donc J se diagonalise en $J = SDS^{-1}$ avec

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)^2} \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \omega & & & \\ & & \omega^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \omega^{n-1} \end{bmatrix}$$

et donc $A = SP(D)S^{-1} = S \begin{bmatrix} P(1) & & & \\ & P(\omega) & & \\ & & \ddots & \\ & & & P(\omega^{n-1}) \end{bmatrix} S^{-1}$, d'où la conclusion.

Preuve du théorème

On a

$$P_{k+1} = \begin{bmatrix} 3_1^{k+1} \\ \vdots \\ 3_n^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3_1^k + 3_2^k}{2} \\ \vdots \\ \frac{3_n^k + 3_1^k}{2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{:= A} \underbrace{\begin{bmatrix} 3_1^k \\ 3_2^k \\ \vdots \\ 3_n^k \end{bmatrix}}_{P_k}$$

donc $\boxed{P_k = A^k P_0}$. Maintenant, on remarque que A est circulaire $A = \text{circ}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0\right)$ associée donc au polynôme $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}X$. Ainsi, A se diagonalise en

$$A = S \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\omega & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\omega^{n-1} \end{bmatrix} S^{-1}$$

Ainsi

$$A^k = S \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\omega\right)^k & \\ & & \ddots \\ & & & \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\omega^{n-1}\right)^k \end{bmatrix} S^{-1}$$

Or, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\omega^i\right| \leq \frac{1}{2}(1+|\omega^i|) = 1$ (inégalité stricte (cas d'égalité impossible car $\omega^i = 1$ ssi $n|i$))

donc $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\omega^i\right)^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

et donc $A^k \to S \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} S^{-1}$.

Calculons S^{-1} : On remarque que S est normale et donc les vecteurs propres associés à des vp distinctes sont $\perp$

d'où $S^*S = \begin{bmatrix} *_1 & & 0 \\ & *_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & *_n \end{bmatrix}$. Or, $\langle C_i | C_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} \omega^{(j-1)i}\,\bar{\omega}^{(j-1)i} = n$ (de S)

Ainsi, $S^*S = nI$ et donc $S^{-1} = \frac{1}{n}{}^tS = \frac{1}{n}\overline{{}^tS} = \frac{1}{n}\bar{S}$.

Conclusion. $A^k \longrightarrow S \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} S^{-1} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ (Simple calcul)

D'où $P_k = A^k P_0 \xrightarrow[k\to+\infty]{} \frac{1}{n}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{B_1+B_2+\cdots+B_n}{n} \\ \vdots \\ \frac{B_1+B_2+\cdots+B_n}{n} \end{bmatrix}$

Ainsi, les polygones P_k convergent vers le "polygone" constant réduit au point $\frac{B_1+\cdots+B_n}{n}$, l'isobarycentre du polygone de départ.