

Leçon 103 - Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotient.

Cadre : Dans la suite (G, \cdot) est un groupe.

1. Sous-groupe distingué, groupe quotient. —

1. Sous-groupe distingué. —

- Def : Soit H un sous-groupe de G . On dit que H est distingué dans G et on note $H \triangleleft G$ ssi $\forall g \in G, gH = Hg$.
- Ex : $\langle r \rangle \triangleleft D_n$ où D_n désigne le groupe diédral, groupe des isométries linéaires du plan préservant le n -gone régulier.
- Ex : Soient G, G' des groupes et $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes. On a :
 - i) Si $H \triangleleft G$ alors $f(H) \triangleleft G'$.
 - ii) Si $H' \triangleleft G'$ alors $f^{-1}(H') \triangleleft G$.
- En particulier, $A_n \triangleleft \Sigma_n, Z(G) \triangleleft G, Sl_n(K) \triangleleft Gl_n(K)$.
- Ex : $SO_n(\mathbb{R}) \triangleleft O_n(\mathbb{R})$.
- Pro : Si G est abélien, tout sous-groupe de G est distingué dans G .
- Contre-ex : Tous les sous-groupes de H_8 (le groupe des quaternions) sont distingués mais H_8 n'est pas abélien.
- Pro : Tout sous-groupe d'indice 2 est distingué.
Plus généralement, pour G groupe fini, tout sous-groupe d'indice le plus petit diviseur premier de $|G|$.

2. Groupe quotient. —

- Def+Pro : Si $H \triangleleft G$, on peut munir l'ensemble quotient G/H d'une structure de groupe en posant $(gH).(g'H) = (gg'H)$.
- Ex : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, L^p := \mathcal{L}^p/N$ où N est le sous-groupe des fonctions de \mathcal{L}^p nulles presque partout.
- Pro : La projection canonique $\pi : G \rightarrow G/H$ définit un morphisme de groupes surjectif de noyau H .
Si de plus G est fini, alors $|G| = |G/H|.|H|$.
- Pro : π induit une bijection entre l'ensemble des sous-groupes de G contenant H , et l'ensemble des sous-groupes de G/H .
- Ex : Les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont les $(d\mathbb{Z})/(n\mathbb{Z})$ où $d|n$.
- Thm (propriété universelle) : Soit $H \triangleleft G, G'$ un groupe, et $\varphi : G \rightarrow G'$ morphisme tel que $H \subset \text{Ker}(\varphi)$.
Alors $\exists! \bar{\varphi} : G/H \rightarrow G'$ tel que $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$.
- Ex : $(\mathbb{C}^*)/(\mathbb{R}_+^*) \simeq \mathbb{U}, (\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +) \simeq \mathcal{U}, (\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z}, +) \simeq \mathbb{C}^*$.
- Thm : (3e thm d'isomorphie) $(H \triangleleft G \text{ et } H \subset K \triangleleft G) \Rightarrow (G/H)/(K/H) \simeq G/K$.

3. Sous-groupes caractéristiques. —

- Contre-ex : $H = \langle (1, 2)(3, 4) \rangle \triangleleft K = \{id, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}$.
 $K \triangleleft A_4$ mais $H \not\triangleleft A_4$.

- Def : Un sous-groupe H est dit caractéristique si H est stable pour tout automorphisme de G . On note $H \sqsubset G$.
- Ex : $Z(G) \sqsubset G, \langle \text{carrés} \rangle \sqsubset G$.
- Rem : Si $H \sqsubset G$, alors $H \triangleleft G$.
- Def : Le groupe dérivé de G est $D(G) := \langle \{xyx^{-1}y^{-1}, x, y \in G\} \rangle$.
- Pro : $D(G) \sqsubset G$ et $D(G)$ est le plus petit sous-groupe distingué H de G tel que G/H est abélien.
- Pro : Si $H \sqsubset K \triangleleft G$ alors $H \triangleleft G$.
Si $H \sqsubset K \sqsubset G$ alors $H \sqsubset G$.

2. Produits directs et semi-directs de groupes. —

1. Produits directs. —

- Def : Soient G, G' deux groupes. On peut munir $G \times G'$ d'une structure de groupe en posant $(g_1, g'_1).(g_2, g'_2) = (g_1g_2, g'_1g'_2)$.
- Rem : $G \times \{e_{G'}\} \triangleleft G \times G', \{e_G\} \times G \triangleleft G \times G'$.
- Thm : Soit G un groupe, et $G_1, G_2 \triangleleft G$ avec :
 - i) $G_1 \triangleleft G, G_2 \triangleleft G$.
 - ii) $G_1 \cap G_2 = \{e\}$.
 - iii) $G_1G_2 = G$.Alors $G \simeq G_1 \times G_2$.
- App : Théorème chinois : $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}) \Leftrightarrow (\text{pgcd}(n, m) = 1)$.

2. Produits semi-directs. —

- Def : Soit G et N deux groupes, et $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(N)$ un morphisme. On peut munir $N \times G$ d'une structure de groupe en posant $(n, g).(n', g') = (n\varphi(g)(n'), gg')$.
On note ce groupe $N \rtimes_{\varphi} G$, le produit semi-direct de N par G relativement à φ .
- Rem : L'inverse de (n, h) est alors $(\varphi(h^{-1})(n^{-1}), h^{-1})$.
- Rem : $N \times \{e_G\} \triangleleft N \rtimes_{\varphi} G$, mais $\{e_N\} \times G$ n'est pas forcément distingué dans $N \rtimes_{\varphi} G$.
- Pro : On a l'équivalence :
 - i) $\varphi(g) = Id_N \forall g \in G$.
 - ii) $\{e_N\} \times G \triangleleft N \rtimes_{\varphi} G$
 - iii) $N \rtimes_{\varphi} G \simeq N \times G$.
- Def : Soient N, H deux sous-groupes d'un groupe G , avec $N \triangleleft G$. Alors le produit direct intérieur $N \rtimes H$ est donné par $\varphi : h \mapsto (n \mapsto hnh^{-1})$.
- Pro : Sous les hypothèses précédentes, si de plus $N \cap H = \{e\}$ et $NH = G$ alors $G \simeq N \rtimes H$.
- Ex : $D_n \simeq \langle r \rangle \rtimes \langle s \rangle$.
 $\Sigma_n \simeq A_n \rtimes \langle (1, 2) \rangle$.
Ces produits sont non-directs si $n \geq 3$.

3. Groupes simples. —

1. Simplicité. —

- Def : G est dit simple si il n'admet aucun sous-groupe distingué strict non-trivial.
- Pro : Les seuls groupes abéliens simples sont les $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier.
- Thm : $PSL_n(K) := \frac{SL_n(K)}{Z(SL_n(K))}$ est simple sauf si $(n = 2)$ et $((K = \mathbb{F}_2)$ ou $(K = \mathbb{F}_3))$.
- Dev : Pour tout $n \geq 5$, le groupe alterné A_n est simple.
- Cor : Pour $n \geq 5$, le seul sous-groupe distingué non trivial de Σ_n est A_n .
- Cor : Pour $n \geq 5$, $D(\Sigma_n) = A_n$, $D(A_n) = A_n$.
- Théorème de Feit-Thompson (admis) : Tout groupe simple non banal est d'ordre pair.

2. p-groupes et théorèmes de Sylow. —

- Def : Un groupe H est un p-groupe ssi son ordre est une puissance de p.
- App : Théorème de Cauchy : Soit G un groupe fini et p premier divisant |G|. Alors G possède un élément d'ordre p.
- Cor : Un groupe G est un p-groupe ssi l'ordre de tout élément est une puissance de p.
- Pro : Pour G un p-groupe et Z(G) son centre, on a $|Z(G)| \equiv 0 \pmod{p}$.
- App : Les p-groupes de cardinal p ou p^2 sont toujours abéliens.
- Def : Soit G un groupe fini de cardinal n. Soit p premier divisant n. Un sous-groupe H de G est un p-Sylow de G ssi $|H| = p^{v_p(n)}$.
- Ex : Le groupe $UT_n(\mathbb{F}_p)$ des matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale est un p-Sylow de $GL_n(\mathbb{F}_p)$.
- Pro : Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. Soit S un p-Sylow de H. Alors il existe un p-Sylow S' de G tel que $S = S' \cap H$.
- Théorèmes de Sylow : Soit G un groupe fini de cardinal n, et p premier divisant n.
 - G admet un p-Sylow.
 - Tous les p-Sylow de G sont conjugués.
 - Le nombre n_p de p-Sylow de G vérifie $n_p \mid \frac{n}{p^{v_p(n)}}$ et $n_p \equiv 1 \pmod{p}$.
- App : Un p-Sylow de G est distingué ssi $n_p = 1$.
- App : Tout groupe d'ordre 63 possède un sous-groupe distingué non-trivial.
- App : Tout groupe d'ordre pq avec $p < q$ premiers et $q \not\equiv 1 \pmod{p}$ est cyclique.
- App : Tout groupe d'ordre $q^s p$ avec $q > p$ premiers, $s \geq 1$ ou d'ordre pqr avec p, q, r premiers n'est pas simple.
Par exemple, si $|G| \in \{18, 30, 42, 50, 54, 70\}$, il n'est pas simple.

4. Représentations linéaires et sous-groupes distingués. —

- Def : Une représentation linéaire ρ sur un groupe fini G est un morphisme de groupes $\rho : G \rightarrow GL(V)$ où V est un \mathbb{C} -ev de dimension finie.
- Def : Le caractère χ_ρ d'une représentation linéaire ρ est l'application $g \in G \mapsto \chi_\rho(g) := \text{Tr}(\rho(g)) \in \mathbb{C}$.
- Def : Une sous-représentation d'une représentation $\rho : G \rightarrow GL(V)$ est une représentation $\rho' : G \rightarrow GL(V')$ avec V' s-ev de V tel que $\forall g \in G, V'$ est $\rho(g)$ -stable avec

$$\rho(g)|_{V'} = \rho'(g).$$

Une représentation est dite irréductible si elle n'admet aucune sous-représentation stricte non-triviale.

Un caractère irréductible est le caractère d'une représentation irréductible.

- Pro : Caractère d'une somme directe de représentations.
- Pro : Orthogonalité des caractères irréductibles pour le produit scalaire donné.
- Pro : Les caractères sont des fonctions centrales.
- Def : Table de caractères.
- Pro : Les colonnes d'une table de caractères sont orthogonales.
- Ex : Table de caractères de Σ_4 , d'un groupe cyclique.
- Dev : Soit G un groupe d'ordre n. Soient ρ_1, \dots, ρ_r un ensemble de représentants des classes d'isomorphie des représentations irréductibles de G, et soient χ_1, \dots, χ_r les caractères irréductibles associés.
On note $K_{\chi_i} := \{g \in G \mid \chi_i(g) = \chi_i(e)\}$.
Alors $K_{\chi_i} = \text{Ker}(\rho_i)$ et les sous-groupes distingués de G sont exactement les $\bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}$, pour tout $I \subset \{1, \dots, r\}$.
- Cor : G est simple ssi pour tout caractère irréductible χ non-trivial et $\forall g \neq e$ on a $\chi(g) \neq \chi(e)$.
- App : V_4 est le seul sous-groupe distingué non-trivial de A_4 . (Table de caractères en annexe)
- App : Sous-groupes distingués de D_6 . (Table de caractères en annexe)

Références

Perrin : Automorphisme intérieur, s-g distingué, un s-g distingué est réunion de classes de conjugaisons, G abélien \Rightarrow tout s-g est distingué, contre-ex. Groupe quotient, propriétés, propriété universelle, exemples. Centre, exemples. Groupes simples, propriétés, groupes d'ordre pq, morphismes sur un groupe simple, exemples. p-groupes, Th de Sylow, groupes d'ordre 63, applications.

Calais : S-g distingués, s-g d'indice 2 sont distingués, groupes quotients, 3e théorème d'isomorphie. S-g caractéristiques, exemples. Produits semi-directs, exemples Σ_n et D_n .

Ulmer : S-g caractéristiques, propriétés, exemples. Produit direct, Th chinois, exemples.

Combes : Centre d'un p-groupe, groupes d'ordre p^2 abéliens. Th de structure des groupes abéliens, exemple, exposant.

Lang : A_n est simple. (Dev)

Ertul Anatole, Prodhomme Maxime : Leçon 104.

June 7, 2017

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes