

Formule d'Euler -Maclaurin

Développement très sympa mais assez calculatoire et surtout très long (il va falloir faire des choix). On y présente la formule d'Euler-MacLaurin qui servira par la suite à étudier les nombres de Bernoulli.

Pour le racasage, on pourra adapter la présentation suivant la leçon (voir dans les remarques). On peut recaser ce développement dans les leçons : 224, 228, 230 et 246.

I - Prémisses

🎓 Définition 1 Polynômes de Bernoulli

On définit les polynômes de Bernoulli comme l'extension à $\mathbb{R}$ par périodicité du polynôme sur $[0, 1[$:

$$B_1 = X - \frac{1}{2}$$

et

$$\forall p \geq 2, B'_p = B_{p-1}, \quad \int_0^1 B_p(x) dx = 0.$$

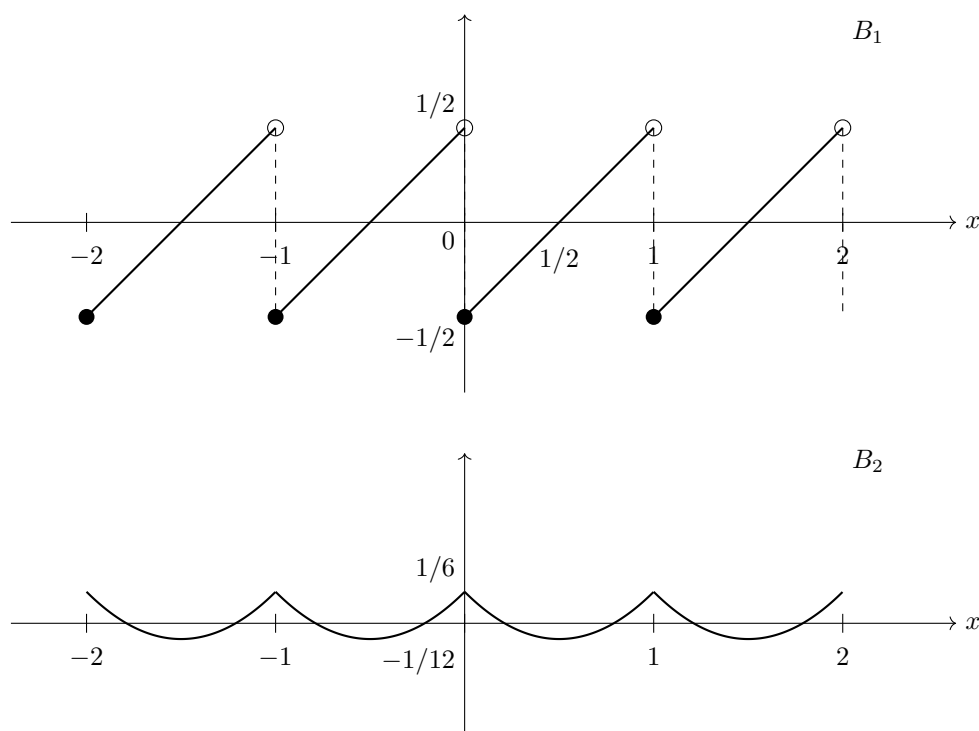


FIGURE 1 – Représentation des fonctions de Bernoulli périodisées B_1 et B_2 .

Définition 2 Nombre de Bernoulli

Les nombres de Bernoulli sont les réels b_p définis par :

$$b_0 = 1, \quad b_1 = -\frac{1}{2}, \quad b_p = B_p(0) \text{ si } p \geq 2.$$

Remarque 3

Pour $p > 1$, les B_p sont continus. Ainsi, $b_p = B_p(0) = B_p(1)$.

II - Le développement

Théorème 4 Formule d'Euler-Maclaurin

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^{2p}([0, 1])$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\frac{1}{2}f(\alpha) + \frac{1}{2}f(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \sum_{m=1}^p (-1)^m \frac{b_m}{m!} \left(f^{(2m-1)}(1) - f^{(2m-1)}(0) \right) + (-1)^{p+1} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{B_p(x)}{p!} f^{(p)}(x) dx,$$

où $(B_p)_{p \geq 0}$ désigne les polynômes de Bernoulli et $b_p = B_p(0)$.

Preuve :

Par définition, $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$, et pour tout $p \geq 2$, $B'_p = pB_{p-1}$ avec $\int_0^1 B_p(x) dx = 0$.

Par IPP successives (récurrence) :

$$\int_0^1 f(x) dx = \left[\left(x - \frac{1}{2} \right) f(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx = \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(0) - \int_0^1 B_1(x) f'(x) dx.$$

Si $p \geq 2$, on a :

$$\int_0^1 B_{p-1}(x) f^{(p-1)}(x) dx = \left[\frac{1}{p} B_p(x) f^{(p-1)}(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{p} B_p(x) f^{(p)}(x) dx,$$

d'où

$$\int_0^1 \frac{B_{p-1}(x)}{(p-1)!} f^{(p-1)}(x) dx = \frac{b_p}{p!} \left(f^{(p-1)}(1) - f^{(p-1)}(0) \right) - \int_0^1 \frac{B_p(x)}{p!} f^{(p)}(x) dx,$$

car $b_p = B_p(0) = B_p(1)$ (on prend $p \geq 2$).

On en déduit la formule :

$$\frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(1) = \int_0^1 f(x) dx + \sum_{m=2}^p (-1)^m \frac{b_m}{m!} \left(f^{(m-1)}(1) - f^{(m-1)}(0) \right) + (-1)^{p+1} \int_0^1 \frac{B_p(x)}{p!} f^{(p)}(x) dx. \quad (1)$$

Remarquons maintenant que pour $p \geq 3$, $(-1)^p B_p(1-x) = B_p(x)$. En effet, en procédant par récurrence (le cas $p = 3$ se vérifie facilement à la main), $(-1)^p B_p(1-x)$ a pour dérivée

$$-(-1)^p B'_p(1-x) = p(-1)^{p-1} B_{p-1}(1-x) = pB_{p-1}(x) = B'_p(x).$$

Comme $B_p(1-x)$ et $B_p(x)$ ont même valeur en $x=1$ et sont d'intégrale nulle, on a

$$(-1)^p B_p(1-x) = B_p(x).$$

Ainsi, si $p \geq 3$ est impair, $b_p = (-1)^p b_p = -b_p$, donc $b_p = 0$. On en déduit la formule sur l'intervalle $[0, 1]$.

Par périodicité des B_p , la formule est vraie sur $[\alpha, \alpha+1], \dots, [\beta-1, \beta]$, et on conclue en sommant. 



Lemme 5

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\|B_{2k}\|_\infty \leq b_{2k}$$

et

$$\text{sgn}(b_{2k}) = (-1)^{k+1}.$$

Preuve :

On applique la formule d'Euler-MacLaurin à $f(x) = e^{-2i\pi m x}$:

$$1 = \underbrace{\int_0^1 e^{-2i\pi m x} dx}_{=0 \text{ si } m \neq 0} + \mathcal{O} - (2\pi i m)^p \int_0^1 \frac{B_p(x)}{p!} f^{(p)}(x) dx.$$

Par conséquent,

$$\widehat{B_p}(m) = \frac{-p!}{(2\pi i m)^p} \text{ si } m \neq 0, \quad \widehat{B_p}(0) = \int_0^1 B_p(x) dx = 0.$$

Pour $p \geq 2$, la série de Fourier est alors convergente (car les coefficients dans ℓ_1 et B_p est continue, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad B_p(x) = -p! \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} \frac{e^{2\pi i m x}}{(2\pi i m)^p}.$$

En particulier, pour $p = 2k$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad B_{2k}(x) = \frac{(-1)^{k+1} 2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi n x)}{n^{2k}}$$

et pour $x=1$, il vient finalement

$$b_{2k} = \frac{(-1)^{k+1} 2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k).$$



Théorème 6

On suppose qu'il existe un entier $m_0 \in \mathbb{N}$ et un réel x_0 tels que pour $m \geq m_0$, les dérivées $f^{(m)}$ soient de signe constant sur $[x_0, +\infty[$, avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(m)}(x) = 0$. Alors il existe une constante C indépendante de k et n , telle que pour tout $n \geq x_0$ et tout $k > m_0/2$, on ait :

$$\sum_{m=\alpha}^n f(m) = C + \frac{1}{2}f(\alpha) + \int_{\alpha}^n f(x) dx + \sum_{m=1}^{k-1} \frac{b_{2m}}{(2m)!} f^{(2m-1)}(n) + R_{n,k}$$

avec

$$R_{n,k} = \theta \frac{b_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n), \quad \theta \in [0, 1].$$

Preuve :

On utilise la formule d'Euler-MacLaurin. L'idée est d'alors de séparer (sous réserve d'existence) l'intégrale en deux :

$$\begin{aligned} \sum_{m=\alpha}^n f(m) &= \frac{1}{2}f(\alpha) - \underbrace{\sum_{m=1}^k \frac{b_{2m}}{(2m)!} f^{(2m-1)}(\alpha) - \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{B_{2k}(x)}{(2k)!} f^{(2k)}(x) dx}_{C_k} \\ &+ \frac{1}{2}f(n) + \int_{\alpha}^n f(x) dx + \sum_{m=1}^{k-1} \frac{b_{2m}}{(2m)!} f^{(2m-1)}(n) + \underbrace{\frac{b_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n) + \int_n^{+\infty} \frac{B_{2k}(x)}{(2k)!} f^{(2k)}(x) dx}_{R_{n,k}}. \end{aligned}$$

Montrons l'existence des deux intégrales (on le fait que pour l'une, l'autre en découle par la même technique). D'après le lemme sur les nombres de Bernoulli :

$$\left| \int_n^{+\infty} \frac{B_{2k}(x)}{(2k)!} f^{(2k)}(x) dx \right| \leq \|B_{2k}\|_{\infty} \int_n^{+\infty} \underbrace{\frac{f^{(2k)}(x)}{(2k)!}}_{\text{signe constant si } n \geq x_0} dx \leq \|b_{2k}\|_{\infty} \left| \int_n^{+\infty} \frac{f^{(2k)}(x)}{(2k)!} dx \right|.$$

Comme $\int_m^{+\infty} f^{(2k)}(x) dx = -f^{(2k-1)}(m)$, on en déduit à la fois que les intégrales sont bien définies, et qu'il existe $\theta \in [0, 2]$ tel que

$$R_{n,k} = \theta \frac{b_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n).$$

Maintenant, en appliquant la formule à l'ordre $k+1$, par identification :

$$C_k + R_{n,k} = C_{k+1} + \frac{b_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n) + R_{n,k+1}.$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, il vient $C_k = C_{k+1}$ et

$$R_{n,k} = \frac{b_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n) + R_{n,k+1}.$$

Or, par le lemme et les hypothèses sur f :

$$\begin{cases} \operatorname{sgn}(R_{m,k}) = \operatorname{sgn}\left(b_{2k} f^{(2k-1)}(m)\right), \\ \operatorname{sgn}(b_{2k}) = (-1)^{k+1}, \\ \operatorname{sgn}(f^{(2k-1)}(n)) = -\operatorname{sgn}(f^{(2k)}(n)) = \operatorname{sgn}(f^{(2k+1)}(n)). \end{cases}$$

On a donc

$$\theta = \frac{R_{n,k}}{\frac{b_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n)} \leq 1 + \frac{R_{n,k+1}}{\frac{b_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n)} \quad (\text{négatif}).$$



III - Remarques

1 - Ce développement est trop long pour être présenté de manière entière. Pour la leçon 246, je conseille de présenter le lemme et le développement asymptotique, en admettant la formule d'Euler-MacLaurin. Pour les autres leçons, je pense qu'il faut admettre le lemme et présenter la formule avec son application.

2 - Ce développement est très calculatoire, et il faut l'avoir bien travaillé pour ne pas se tromper. Les hypothèses pour l'application aux DA sont utilisées de manières subtiles, mais sont bien utilisées. Il ne faut donc pas oublier d'insister sur les passages où elles sont utilisées (pour l'intégrale et le signe de $f^{(2k-1)}(n)$).

3 - Le développement asymptotique peut être utilisé pour la série harmonique, ou pour l'équivalent de Sterling (voir [Dem]).

IV - Références

[Dem] : *Analyse numérique et équations différentielles*, Jean-Pierre Demailly