

NOM : NI

Prénom : Félix

Rouge entourez l'épreuve

Bleu

entourez le Jury

A B C D E F

Sujet choisi : 221: Equations différentielles linéaires - systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.
Autre sujet : 233.

I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $K \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

I - Résultats Théoriques

1) Définition et notations

Def 1: Soit $p \in \mathbb{N}$. On appelle Equation différentielle linéaire d'ordre p toute Equation
 $(L_p): y^{(p)} = A_{p-1}(t)y^{(p-1)} + \dots + A_0(t)y + B(t)$
 d'inconnue $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\mathbb{C}^n$, avec $B \in \mathcal{C}^0(I, K^n)$
 et $A_0, \dots, A_{p-1} \in \mathcal{C}^0(I, M_n(K))$.
 Lorsque $B \equiv 0$, on dit que (L_p) est homogène ou la note (L_p^h) .

Prop 2: $(L_p) \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(p-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ A_0 & \dots & A_{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(p-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B(t) \end{pmatrix}$

On peut toujours se ramener à une équation d'ordre 1 $(L): Y' = A(t)Y + B(t)$.

2) Existence et unicité

Lemme 3: (Point fixe de Banach-Picard) Soit (E, d) un espace métrique complet et $\phi: E \rightarrow E$ contractant. Alors ϕ admet un unique point fixe.

Lemme 4: (Grönwall) Soit $w \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $v \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$
 tq $\forall t \in I, w'(t) \leq v(t)w(t)$. Alors $\forall t \in I$,
 $t \geq t_0 \Rightarrow w(t) \leq w(t_0) \exp(\int_{t_0}^t v(s) ds)$.

Th 5: (Cauchy-Lipschitz linéaire) Soit $(t_0, y_0) \in I \times K^n$, alors (L) admet une unique solution $y: I \rightarrow K^n$ tq $y(t_0) = y_0$.

Cor 6: (Cas scalaire) Si $n=1$, $t_0 \in I$ et $y_0, \dots, y_{p-1} \in K$, alors $(L_p): y^{(p)} = a_{p-1}(t)y^{(p-1)} + \dots + a_0(t)y + b(t)$ admet une unique solution $y: I \rightarrow K$ tq $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(p-1)}(t_0) = y_{p-1}$.

Cor 7: (Structure des solutions)

Notons S^h (resp. S) l'ensemble des solutions de (L^h) (resp. L) sur I . Alors:

- S^h est un sev de $\mathcal{C}(I, K^n)$ de dimension n et $\forall t_0 \in I, \phi_{t_0}: S^h \rightarrow K^n$ est un isomorphisme $y \mapsto y(t_0)$.
- S est un K -espace affine de direction S^h .

Ex 8: $(t \mapsto e^t, t \mapsto te^t)$ est une base de l'ensemble des solutions de $y'' - 2y' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

3) Matrice fondamentale et wronskien

Def 9: Un système fondamental de solutions de (L^h) (SFS) est une famille $(y_1, \dots, y_n)$ de n sol. indépendantes de (L^h) .

$\phi: t \mapsto (y_1(t), \dots, y_n(t))$ est une matrice fondamentale de (L^h) . Son déterminant est appelé wronskien du SFS, on le note $W(t)$.

Ex 10: $\phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ e^t & (t+1)e^t \end{pmatrix}$ et $W(t) = e^{2t}$ dans l'ex 8.

Prop 11: Soit $1 \leq m \leq n$ et $y_1, \dots, y_m \in S^h$. les ASSE:

- $(y_1, \dots, y_m)$ est libre dans $\mathcal{C}(I, K^n)$
- $\forall t \in I, (y_1(t), \dots, y_m(t))$ est libre dans K^n
- $\exists t_0 \in I, (y_1(t_0), \dots, y_m(t_0))$ est libre dans K^n

Prop 12: Soit $\phi \in \mathcal{C}^0(I, M_n(K))$. ϕ est une matrice fondamentale de (L^h) si ϕ est dérivable sur I , $\forall t \in I, \phi'(t) = A(t)\phi(t)$, et $\forall t \in I, \phi(t)$ est inversible.

Cor 13: Soit ϕ une PF de (L^h) , $t_0 \in I, y_0 \in K^n$. La sol. de (L^h) tq $y(t_0) = y_0$ est $y: t \mapsto \phi(t)\phi(t_0)^{-1}y_0$.

Ex 14: la sol. de $y'' - 2y' + y = 0$ tq $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$ est $y: t \mapsto (t+1)e^t$.

Prop 15: (Abel) $\forall t \in I, W'(t) = -A(t)W(t)$ et

si $t_0 \in I$, alors $\forall t \in I, W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t -A(u) du\right)$

App 16: Soit $q \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tq $\int_0^{+\infty} |q|$ converge. Alors $y'' + q(t)y = 0$ admet des solutions non bornées (sur $\mathbb{R}_+$).

II - Résolution explicite

1) Equation scalaire d'ordre 1

Prop 17: Soit $a \in C^0(I, K)$. la solution de $y' = a(t)y$ tq $y(t_0) = y_0$ est $y: t \mapsto y_0 \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$

Prop 18: Soit $a, b \in C^0(I, K)$. la sol. de $y' = a(t)y + b(t)$ tq $y(t_0) = y_0$ est $y: t \mapsto y_0 e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} + \int_{t_0}^t b(s) e^{\int_{t_0}^s a(u) du} ds$

Ex 19: les solutions de $y' = 2y + 1$ sont les $t \mapsto C e^{2t} - \frac{1}{2}, C \in K$
 • la sol de $y' + y = e^t$ tq $y(1) = 0$ est $y: t \mapsto \frac{e^t - e^{t+2}}{2}$

App 20: (transformée de Fourier de la gaussienne)
 $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-x^2/4}$

2) Coefficients constants

Dans cette partie, $(L^n): y' = AY$ avec $A \in M_n(K)$

Prop 21: $\phi: t \mapsto e^{tA}$ est une TF de (L^n) , ie: $\forall t_0 \in \mathbb{R}, \forall y_0 \in K^n$, la solution de (L^n) tq $y(t_0) = y_0$ est $y: t \mapsto e^{(t-t_0)A} y_0$

Rq 22: la réduction de A permet de résoudre plus facilement

Ex 23: L'ensemble des solutions de $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y \end{cases}$ est
 $t \mapsto \begin{cases} \alpha e^{3t} + \beta e^{-t} \\ \alpha e^{3t} - \beta e^{-t} \end{cases}, \alpha, \beta \in K$

Prop 24: (Variation de la constante / Formule de Duhamel)
 la solution de (L^n) tq $y(t_0) = y_0$ est
 $y: t \mapsto e^{(t-t_0)A} y_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} B(s) ds$

Rq 25: En pratique, on cherche une solution particulière de la forme $y(t) = \phi(t) C(t)$.

• En dim 2, pour résoudre $y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = b(t)$ étant donné un SFS de (L^2) (y_1, y_2) , on résout

$$\begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0 \\ \lambda y_1' + \mu y_2' = b \end{cases} \quad (\text{en } \lambda, \mu \in C^1(I, K))$$

pour avoir comme solution $y: t \mapsto \lambda(t)y_1(t) + \mu(t)y_2(t)$

Ex 26: la sol. de $y'' - 2y' + y = e^t$ avec $y(-1) = 0, y'(-1) = 1$ est $y: t \mapsto \left(\frac{t^2}{2} + t(e+1) + e + \frac{1}{2}\right) e^t$

Dans la suite de cette partie, on s'intéresse à l'équation scalaire $(L): y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b(t)$ avec $a_0, \dots, a_{n-1} \in K$.

Def 27: On appelle polynôme caractéristique de (L) le polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$. L'équation caract. est $P(X) = 0$.

Th 28: (cas complexe) Notons $r_1, \dots, r_s$ les racines complexes de P , de multiplicités $m_1, \dots, m_s$. Une base de (S^n) est $(t \mapsto t^l e^{r_k t})_{\substack{1 \leq k \leq s \\ 0 \leq l \leq m_k - 1}}$

Cor 29: (cas réel) Notons $r_1, \dots, r_s$ les racines réelles de P , de multiplicités $m_1, \dots, m_s$ et $r_{s+1}, \overline{r_{s+1}}, \dots, r_{s+l}, \overline{r_{s+l}}$ des racines complexes de multiplicités $m_{s+1}, m_{s+1}, \dots, m_{s+l}, m_{s+l}$ de $P \in \mathbb{R}[X]$. Une base de (S^n) est $(t \mapsto t^l e^{r_k t})_{\substack{1 \leq k \leq s \\ 0 \leq l \leq m_k - 1}}, (t \mapsto t^l e^{r_{s+l} t} \cos(\alpha t)), (t \mapsto t^l e^{r_{s+l} t} \sin(\alpha t))_{\substack{s+1 \leq k \leq s+l \\ 0 \leq l \leq m_k - 1}}$

$$(t \mapsto t^l e^{r_{s+l} t} \sin(\alpha t))_{\substack{s+1 \leq k \leq s+l \\ 0 \leq l \leq m_k - 1}}$$

où $r_k = \alpha_k + i\omega_k$ pour $s+1 \leq k \leq s+l$.

Ex 30: L'ensemble des sol. de $y'' - 3y' - 4y = 0$ est $\{t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{4t} \mid \lambda, \mu \in K\}$

III - Etude qualitative

1) Localisation des zéros

Dans cette partie, $(L): y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ avec $p, q \in C^0(I, \mathbb{R})$

Prop 31: Soit $y \in C^2(I, \mathbb{R})$ solution de (L) non nulle.

Alors les zéros de y sont isolés.

Lemma 32: Soit $a \in \mathbb{R}$, $y_1, y_2 \in C^2([a, +\infty[, \mathbb{R})$ sans zéro commun et $w = y_1 y_2' - y_2 y_1'$. Alors $\exists \pi, \theta \in C^2([a, +\infty[, \mathbb{R})$, $y_1 = \pi \cos(\theta)$, $y_2 = \pi \sin(\theta)$.

Th 33: Si $q \in C^2([a, +\infty[, \mathbb{R})$, $q > 0$, $\int_a^{+\infty} \sqrt{q} = +\infty$ et $q' = o(q^{3/2})$, alors si y est sol. réelle non nulle de $y'' + qy = 0$, $N(x) := \#\{t \in [a, x] / y(t) = 0\} \sim \frac{1}{\pi} \int_a^x \sqrt{q}$.

Ex 34: si $a = 1$, $q: x \mapsto \frac{1}{4x^2}$ alors $\int_1^{+\infty} \sqrt{q} = +\infty$ mais $q' q^{-3/2} = -4 \neq 0$. De plus la sol. générale de $y'' + \frac{1}{4x^2} y = 0$ est $y: x \mapsto \sqrt{x} (\lambda + \mu \log(x))$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ qui a au plus 1 zéro.

Th 35: (Sturm) Soit $q, r \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ $q \leq r$. Soit y, z sol. resp. de $y'' + qy = 0$ et $z'' + rz = 0$. Alors: si $x_0 < x_1$ sont deux zéros consécutifs de y , alors z s'annule sur $[x_0, x_1]$; si de plus $z(x_0) = 0$ alors z s'annule sur $]x_0, x_1]$.

Ex 36: • Pour $y'' + y = 0$ ($q=r=1$), les zéros de $\cos$ et $\sin$ sont entrelacés
• $y'' - p(x)y = 0$ avec $p \in C^0(I, \mathbb{R}_+)$ admet au plus un zéro.

2) Comportement asymptotique Dans cette partie, $+\infty \in I$.

Def 37: Soit y_{0, y_0} sol. de (L) tq $y(t_0) = y_0$.

On dit que y_{0, y_0} est stable (à droite) si

$\exists \delta > 0, \exists \eta > 0, \forall y_2 \in B(y_0, \delta), \forall t \geq t_0, \|y_{y_2}(t) - y_{y_0}(t)\| \leq \eta$

On dit que y_{0, y_0} est asymptotiquement stable si de plus

$\exists \delta > 0, \forall y_2 \in B(y_0, \delta), y_{y_2}(t) - y_{y_0}(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

Prop 38: Soit ϕ une RF de (L) . Alors les ASE:

- (L) admet une sol. stable (resp. asympt. stable)
- toute sol. de (L) est stable (resp. asympt. stable)
- ϕ est bornée (resp. $\phi(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$)

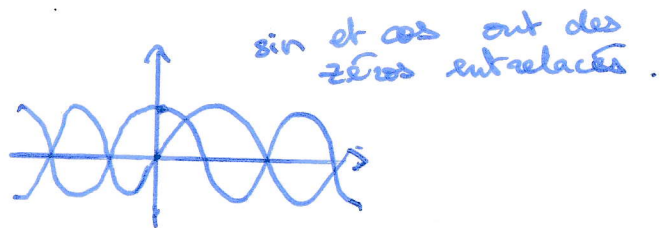
Ex 39: les sol. de $y' = y$ ne sont pas stables (à droite) celles de $y' = -y$ sont asympt. stables (à droite)
• les sol. de $y' = 1$ sont stables mais non bornées.

Lemma 40: Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses v.p. Supposons que $\forall i \in [1, n], \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$. Alors $\exists a, C > 0, \forall t \geq 0, \|e^{tA}\| \leq C e^{-at}$.

Th 41: (Lyapunov linéaire) les sol. de $y' = Ay$ sont asympt. stables si $\forall i \in [1, n], \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$

Th 42: (Lyapunov) Soit $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ de classe C^1 tq $f(0) = 0$. On pose $A = df_0 \in M_n(\mathbb{C})$. Si $\forall i \in [1, n], \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$, alors $\exists \alpha > 0, \forall \|y_0\| \leq \alpha$, la sol y_{0, y_0} de $y' = f(y)$ existe sur $\mathbb{R}_+$, et la sol. nulle est asympt. stable pour $y' = f(y)$.

Ex 36 :



Plan de phases de $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$
 selon les vp λ_1, λ_2 de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

