

NOM: NI

Prénom: Félix

Rouge entourez l'épreuve Bleu

entourez le Jury A B C D E F

Sujet choisi : 203. Utilisation de la notion de compacité

Autre sujet : 243. Séries étudiées

(X, d) est un espace métrique
I - Définition et caractérisation

1) Borel - Lebesgue

Def 1 : (X, d) est compact si $\forall (O_i)_{i \in I}$ ouverts de X , $(X = \bigcup_{i \in I} O_i \Rightarrow \exists J \subset I$ fini, $X = \bigcup_{i \in J} O_i)$.

Ex 2 :
• Si X est fini, alors X est compact.
• $\mathbb{R}$ n'est pas compact.

Prop 3 : X est compact si $\forall (F_i)_{i \in I}$ fermés de X ,
 $(\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset \Rightarrow \exists J \subset I$ fini, $\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset)$

Cor 4 : (Compacts emboîtés) Une suite décroissante de fermés non vides d'un compact est non vide.

C-Ex 5 : $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, +\infty[= \emptyset$

Prop 6 : $A \subset X$ est compact si $\forall (O_i)_{i \in I}$ ouverts de X , $(A \subset \bigcup_{i \in I} O_i \Rightarrow \exists J \subset I$ fini, $A \subset \bigcup_{i \in J} O_i)$

Ex 7 : Soit $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ avec K compact. Si f est localement bornée, alors f est bornée.

Prop 8 :
• Une union finie de compacts est compacte.
• Une intersection de compacts est compacte.

2) Bolzano - Weierstrass

Prop 9 :
• Si X compact et $A \subset X$ fermé, alors A compact.
• Si $A \subset X$ est compact, alors A est fermé.

Prop 10 : Soit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ convergente, vers $l \in X$.
Alors $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est compact.

2) Bolzano - Weierstrass

Def 11 : X est précompact si $\forall \varepsilon > 0, \exists x_1, \dots, x_N \in X$
 $X \subset \bigcup_{i=1}^N B(x_i, \varepsilon)$

Lemme 12 : Si X vérifie : "de toute suite de X , on peut extraire une sous-suite convergente" alors X est précompact.

Lemme 13 : Avec les mêmes hypothèses, soit $(O_i)_{i \in I}$ ouverts de X tq $X = \bigcup_{i \in I} O_i$.
Alors $\exists \alpha > 0, \forall x \in X, \exists i \in I, B(x, \alpha) \subset O_i$ ("nombre de Lebesgue")

Th 14 : X est compact si de toute suite de X on peut extraire une sous-suite convergente.

Cor 15 : Si X est compact, alors X est complet.

Cor 16 : (Lemme des sous-sous-suites) Si X compact, et $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ n'a qu'une seule valeur d'adhérence, alors (x_n) converge vers cette v.a.

Cor 17 : Soit $(E_i, d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ des espaces métriques.
Alors $\prod_{i=1}^{\infty} E_i$ est compact si $\forall i \in \mathbb{N}, E_i$ est compact.

3) Espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|)$ est un evn.

Prop 18 : Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés.

Th 19 : Si E est de dim finie, toutes les normes sur E sont équivalentes.

Rq 20 : la preuve utilise la prop 24 et le Rq 27

Cor 21: Les compacts d'un evn de dim finie sont les fermés bornés.

Ex 22: $D_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$

Cor 22: Si E est de dim finie, $(F, \|\cdot\|_F)$ est un evn quelconque, alors tout $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est continu.

Th 23: (Riesz) $\bar{B}(0, 1)$ est compact ssi E est de dim finie

→ II - Continuité et compacité (X, S) est métrique
→ 1) Fonctions continues sur un compact

Prop 24: Soit $f: X \rightarrow Y$ C^0 . Si X compact, alors $f(X)$ compact.

Cor 25: (Poincaré) Soit $f: X \rightarrow Y$ C^0 bijective. Si X est compact, alors f est un homéomorphisme.

App 26: Si I, J sont des intervalles de $\mathbb{R}$, $f: I \rightarrow J$ C^0 bijective, alors f est un homéomorphisme.

Th 27: (Bornes atteintes) Soit $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ C^0 avec X compact. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

App 28: Soit K_1, K_2 compacts de E . Alors $\exists x_1 \in K_1, x_2 \in K_2$,
 $d(x_1, x_2) = d(K_1, K_2)$
• Si K_2 est seulement fermé, alors $d(K_1, K_2) \neq 0$
 $K_1 \cap K_2 = \emptyset$

C-ex 29: Le 2^e point est faux si K_1 est aussi seulement fermé: prendre $K_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq 0\}$
 $K_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq e^x\}$

Def 30: Soit $f: X \rightarrow Y$. f est coercive si $\forall K \subset Y$ compact, $f^{-1}(K)$ est compact de dim finie

Prop 31: Si X et Y sont des evn, f est coercive ssi $\|f(x)\|_F \xrightarrow{\|x\|_E \rightarrow +\infty} +\infty$

si c'est le cas et que $F = \mathbb{R}$, alors f admet un minimum

Th 32: (Heine) Soit $f: X \rightarrow Y$ C^0 . Si X compact, alors f est uniformément continue

App 33: Cela permet de construire l'intégrale de Riemann

2) Parties ^{denses} compactes Dans cette partie, X est compact

Th 34: (Diri) : Soit $(f_n) \in C^0(X, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ croissante (ie $\forall n, f_n \leq f_{n+1}$) tq $f_n \xrightarrow{\text{cru}} f \in C^0(X, \mathbb{R})$. Alors $f_n \xrightarrow{\text{cru}} f$

Ex 35: Si f_n n'est pas C^0 , c'est faux: prendre $f_n: x \mapsto x^n$

App 36: Posons $P_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P_n^2(x))$ pour $x \in [-1, 1]$. Alors $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ conv vers $x \mapsto |x|$ sur $[-1, 1]$.

Th 37: (Stone - Weierstrass réel) Toute sous-algèbre ^Aunitaire de $C^0(X, \mathbb{R})$ séparante (ie $\forall x \neq y \in X, \exists f \in A, f(x) \neq f(y)$) est dense dans $C^0(X, \mathbb{R})$ (pour $\|\cdot\|_{\infty}$).

Cor 38: Les fonctions polynômiales sur un segment $[a, b]$ sont denses dans $C^0([a, b], \mathbb{R})$.

C-ex 39: Les fonctions polynômiales de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{C}$ ne sont pas denses dans $C^0([a, b], \mathbb{C})$

Th 40: (Stone - Weierstrass complexe) Toute sous-algèbre ^Aunitaire de $C^0(X, \mathbb{C})$ séparante et auto-conjuguée (ie $\forall f \in A, \bar{f} \in A$) est dense dans $C^0(X, \mathbb{C})$.

App 41: Les polynômes trigonométriques sont denses dans $C_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \{f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \text{ } 2\pi\text{-périodique}\}$

dire q l'on se place dans $(C^0(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$ qui est un Banach...

3) Parties compactes Dans cette partie, X est compact

Def 42: $H \subset C^0(X, \mathbb{R})$ est équicontinue en $x_0 \in X$ si
 $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, d(x, x_0) < \eta \Rightarrow \forall h \in H, |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$.

H est uniformément équicontinue si
 $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in X, d(x, y) < \eta \Rightarrow \forall h \in H, |h(x) - h(y)| < \varepsilon$.

Prop 43: (Heine) $H \subset C^0(X, \mathbb{R})$ est unif. équicontinue
 ssi $\forall x_0 \in X, H$ est équicontinue en x_0 .

Ex 44: Si $L > 0$, l'ensemble des fonctions L -lipschitz
 est équicontin (uniformément).

Th 45: $H \subset C^0(X, \mathbb{R})$ est relativement compact (ie H
 est compact) ssi H est bornée et équicontinue.

App 46: Soit V un sev fermé de $C^0([0,1], \mathbb{R})$,
 inclus dans $C^1([0,1], \mathbb{R})$. Alors $\dim(V) < +\infty$.

App 47: (Cauchy-Peano-Arzelà) Soit $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ouvert
 et $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^0 . Soit $(t_0, y_0) \in U$, alors $y' = f(t, y)$
 admet une solution $y: [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tq
 $y(t_0) = y_0$.

Ex 48: Il n'y a pas unicité en général: $y' = 3|y|^{2/3}$
 avec $y(0) = 0$ admet comme solutions $y_1: t \mapsto 0$
 $y_2: t \mapsto t^3$
 sur $\mathbb{R}$.

III - Applications

1) Equations différentielles:

Lemme (Grönwall): Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$,
 $a \in \mathbb{R}$, $u, v \in C^0(I, \mathbb{R})$ tq $\forall t \in I, u(t) \leq a + \int_{t_0}^t u(s) ds$.
 Alors $\forall t \in I, u(t) \leq a \exp(\int_{t_0}^t v(s) ds)$

Cor 50: (Cauchy-Lipschitz) Soit $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ouvert
 et $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^0 et localement lipschitz par
 rapport à la 2^e variable. Soit $(t_0, y_0) \in U$, alors
 $y' = f(t, y)$ admet une unique solution maximale
 tq $y(t_0) = y_0$ définie sur un intervalle ouvert.

Th 51: (Sortie de tout compact) Avec les mêmes hypothèses,
 soit $y:]a, d[\rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution maximale.
 Alors $\forall K \subset U$ compact, $\exists V$ voisinage de d
 tq $\forall t \in V, (t, y(t)) \notin K$.

Cor 52: (Lemme des bords) Si $U =]a, b[\times \mathbb{R}^n$ et $d < b$
 alors $\|y(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow d]{} +\infty$.

App 53: Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ localement lipschitz, y une solution
 de $y' = f(y)$ dont la trajectoire est compacte. Alors
 y est définie sur $\mathbb{R}$ et est périodique.

App 54: (Hadamard-Lévy) Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^2 . Alors
 f est un C^2 -difféo si } $\forall x \in \mathbb{R}^n$, df_x est inversible
 } f est coercive
 (ie $\forall K \subset \mathbb{R}^n$ compact, $f^{-1}(K)$ est compact)

2) Topologie faible dans un Hilbert