

Prénom : Félix

NOM : NI

Rouge entourez l'épreuve

Bleu

entourez le Jury

A B C D E F

Sujet choisi : 153

Formes linéaires et dualité en dimension finie

Autre sujet : 154

Exemples et applications

E est un K -ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$

I - Formes linéaires

1) Espace dual

Def 1 : Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans K .

Prop/Def 2 : $E^* := \mathcal{L}(E, K)$ est un K -ev.

Ex 3 : Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E , alors

- $\forall j \in [1, n], (e_j^* : x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \mapsto x_j) \in E^*$
- Si $f : E \rightarrow K$ est différentiable, alors $\exists f^* \in E^*$ pour tout $x \in E$.

Th/Def 4 : $B^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^* appelée base duale de $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$. En particulier, $\dim(E^*) = \dim(E) = n$.

Rq 5 :

- Si $j \in [1, n], e_j^*$ dépend de tous les $e_i, 1 \leq i \leq n$.
- B^* est caractérisée par : $\forall i, j \in [1, n], e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$
- $\forall \varphi \in E^*, \varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*$

Ex 6 : (Formule de Taylor) Si $B = (X^j)_{0 \leq j \leq n}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, alors :

$\forall j \in [0, n], \forall P \in \mathbb{R}_n[X], e_j^*(P) = \frac{P^{(j)}(0)}{j!}$

Rq 7 : Si B est la base canonique de $K[X]$, alors $B^* = (e_j^*)_{j \in \mathbb{N}}$, défini par $\forall i, j \in \mathbb{N}, e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$. n'est pas une base de $K[X]^*$ car $\mathbb{N}$ est infini.

Th 8 : $\theta : E \rightarrow E^*$ est un isomorphisme linéaire.

Cor/Def 9 : Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E . Alors il existe une unique base $(\epsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E telle que $\forall i \in [1, n], \epsilon_i^* = e_i$. On l'appelle base ant-duale de $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Rq 10 : E et E^{**} sont canoniquement isomorphes, mais pas E et E^* (il faut se fixer une base).

Th 11 : (Riesz) Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est euclidien, alors $E \rightarrow E^*$ est un isomorphisme (canonique) $x \mapsto \langle x, \cdot \rangle$

Ex 12 : $J_n(K) \rightarrow J_n(K)^*$ est un isomorphisme (canonique) $A \mapsto \text{Tr}(A)$

Th 13 : $\text{Conv}(\text{O}_n(\mathbb{R})) = \{A \in J_n(\mathbb{R}) / \|A\|_2 \leq 1\}$ l'ensemble des points extrémaux est $\text{O}_n(\mathbb{R})$

2) Hyperplans

Def 14 : Un hyperplan de E est un sev $H \subset E$ tq $\exists x \in E, H = x + Kx^\perp$.

Prop 15 : Les hyperplans sont les sev de dim $(n-1)$.

Th 16 : Les hyperplans sont les noyaux de formes linéaires non nulles.

Ex 17 : $\{(x, y, z) \in K^3 / x + y - z = 0\}$ est un hyperplan de K^3 .

Prop 18 : Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_r, \varphi \in E^*$. Alors $\varphi \in \text{Vect}(\varphi_i)_{1 \leq i \leq r}$ si $\bigcap_{i=1}^r \ker(\varphi_i) \subseteq \ker(\varphi)$.

App 19 : (Extrema liés) Soit $f, g_1, \dots, g_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n / g_1(x) = \dots = g_p(x) = 0\}$. Si $f|_\Gamma$ admet un extremum en $a \in \Gamma$ et si $dg_a, a, 1, \dots, dg_a, p$ sont linéaires, alors $df_a \in \text{Vect}(dg_a, 1, \dots, dg_a, p)$.

II - Correspondances

1) Orthogonalité

Def 20 : On dit que $\varphi \in E^*$ et $x \in E$ sont orthogonaux si $\varphi(x) = 0$.

Rq 21 : Si E est euclidien, on retrouve la notion usuelle d'orthogonalité via la Th. 11.

$\frac{D}{E} \frac{V}{1}$

Déf 2 (orthogonal d'une partie) Soit $A \subseteq E$ et $B \subseteq E^*$, on note

$$A^\perp := \{x \in E^* \mid \forall y \in A, \langle y, x \rangle = 0\}$$

$$B^\perp := \{x \in E \mid \forall y \in B, \langle y, x \rangle = 0\}$$

Ex 23: Si $\varphi \in E^*$, alors $\ker(\varphi)^\perp = \ker(\varphi)$

Prop 24: Soit $A_1 \subseteq A_2 \subseteq E$, $B_1 \subseteq B_2 \subseteq E^*$, alors:

$$- A_2^\perp \subseteq A_1^\perp \quad \text{et} \quad B_2^\perp \subseteq B_1^\perp$$

$$- A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp \quad \text{et} \quad B^\perp = (\text{Vect}(B))^\perp \quad \text{et ce sont des sous-espaces de } E \text{ et } E^*.$$

Ex 25: • $\{0\}^\perp = E^*$, $E^\perp = \{0\}$, $\{0\}^\perp = E$, $(E^*)^\perp = \{0\}$.
• $A \subseteq (A^\perp)^\perp$ et $B \subseteq (B^\perp)^\perp$ et il n'y a pas égalité en général.

Th 26: 1) Si F est un sous-espace de E , alors:
 $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$ et $(F^\perp)^\perp = F$.

2) Si G est un sous-espace de E^* , alors:
 $\dim(G) + \dim(G^\perp) = \dim(E)$ et $(G^\perp)^\perp = G$.

Ex 27: L'égalité $(G^\perp)^\perp = G$ est fautive en dim. infinie:

si $E = \mathbb{R}[X]$ et $G := \text{Vect}(\varphi_n : P \mapsto P^{(n)}(0))_{n \in \mathbb{N}}$,
alors $(G^\perp)^\perp = E^* \neq G$.

Cor 28: Soit F_1, F_2 des sous-espaces de E , alors:

$$(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp \quad \text{et} \quad (F_1 \cap F_2)^\perp = F_1^\perp + F_2^\perp$$

2) Soit G_1, G_2 des sous-espaces de E^* , alors:

$$(G_1 + G_2)^\perp = G_1^\perp \cap G_2^\perp \quad \text{et} \quad (G_1 \cap G_2)^\perp = G_1^\perp + G_2^\perp.$$

Cor 29: Soit F un sous-espace de E . Alors F est de dimension d ssi $\exists \varphi_1, \dots, \varphi_{n-d} \in E^*$ libres tq $F = \bigcap_{i=1}^{n-d} \ker(\varphi_i)$.

Ex 30: Une description de F par intersection d'hyperplans s'appelle description cartésienne de F .
Une description de F par une base s'appelle description paramétrique de F .
On peut passer de la 2^e à la 1^{re} avec la base duale d'une base complétée.

On peut passer de la 1^{re} à la 2^e en résolvant un système linéaire via l'algorithme du pivot de Gauss.

Ex 31: $\{(x, y, z) \in K^3 \mid x+y-z=0\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

2) Transposition: F est un K -ev de dimension finie.

Déf 32: Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle transposé de u l'application linéaire ${}^t u : F^* \rightarrow E^*$
 $\varphi \mapsto {}^t \varphi \circ u$

Prop 33: $\mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{L}(F^*, E^*)$ est un isomorphisme linéaire.
 $u \mapsto {}^t u$

Prop 34: Soit $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors:

$$- {}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$$

$$- \text{si } F = E, \quad {}^t \text{Id}_E = \text{Id}_{E^*}$$

- Si u est un isomorphisme de E sur F , alors ${}^t u$ est un isomorphisme de F^* sur E^* ,

$$\text{et: } ({}^t u)^{-1} = {}^t(u^{-1}).$$

- via le th 8, on a ${}^t({}^t u) = u$

Th 35: Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors:

$$- \ker({}^t u) = \text{Im}(u)^\perp$$

$$- \text{Im}({}^t u) = \ker(u)^\perp$$

$$- \text{rg}(u) = \text{rg}({}^t u)$$

Prop 36: (Caractérisation matricielle) Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ des bases de E et F et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(u)$.

$$\text{Alors } \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}({}^t u) = {}^t A.$$

Ex 37: On a les propriétés correspondantes pour la transposition matricielle.

Prop 37: Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ (deux bases de E), alors la matrice de passage de $\mathcal{B}^*$ à $\mathcal{B}'^*$ est ${}^t P^{-1}$.

Ex 38: Cela permet de calculer des bases orthogonales

Ex 39: Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et:
 $f_1^* := 2e_1^* + e_2^* + e_3^*$, $f_2^* := -e_1^* + 2e_3^*$, $f_3^* := e_1^* + 3e_2^*$.
 Alors (f_1^*, f_2^*, f_3^*) est une base de $(\mathbb{R}^3)^*$, et sa
 base antédualle est $\frac{1}{13} \left(\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

Prop 40: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Un ser F de E est stable par
 ssi $F^\perp$ est stable par ${}^t u$.

Cor 41: Soit $n \in [1, n-1]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors:
 u stabilise tout ser de E de dim n ssi u
 est une homothétie.

Lemme 42: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice $q \geq 1$.

Alors il existe $e \in E^*$ et $x \in E$ tq:

$$F := \text{Vect}(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$$

$$\text{et } G := \text{Vect}(e, {}^t u(e), \dots, ({}^t u)^{q-1}(e))^\top$$

sont stables par u , et $E = F \oplus G$.

Th 43: (Réduction de Jordan) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent
 d'indice $q \geq 1$, alors il existe $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$
 base de E tq: $\forall i \in [1, r]$, $\mathcal{B}_i := \text{Vect}(\mathcal{B}_i)$ est
 stable par u , et $\text{not}_{\mathcal{B}_i}(u|_{\mathcal{B}_i}) = J_i := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$