

NOM: NI

Prénom: Félix

Rouge entourez l'épreuve Bleu

entourez le Jury A B C D E F

Sujet choisi: 155 - Exponentielles de matrices. Applications.

Autre sujet: 106 - Groupe Unitaire

I - Généralités1) DéfinitionDans toute la suite, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.Lemme 1: Soit $\|\cdot\|$ une norme sur K^n , alors $\|\cdot\|$ définit par $\|A\| = \sup_{x \in K^n, \|x\|=1} \|Ax\|$ est une norme d'opérateur sur $M_n(K)$, et $\forall A, B \in M_n(K)$, $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.Lemme 2: $M_n(K)$ est complet, donc $\forall (A_k)_{k \in \mathbb{N}} \in M_n(K)^{\mathbb{N}}$, $\sum_{k=0}^{\infty} A_k \text{ ACV} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} C_k \text{ CV}$ Def 3: Soit $A \in M_n(K)$, on note $\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ (ou e^A)Prop 4: ${}^t(e^A) = e^{A^t}$ et $\overline{e^A} = e^{\overline{A}}$ Ex 5: $\forall t \in \mathbb{R}$, $\exp(t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = \cosh(t) I_2 + \sinh(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Prop 6: $e^A \in K[A] := \{P(A) / P \in K[X]\}$ Prop 7: Soit $A, B \in M_n(K)$ tq $AB = BA$. Alors $e^{A+B} = e^A e^B$ Cor 8: Si A et B commutent, alors e^A et e^B commutentEx 9: Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $e^A e^B \neq e^{A+B}$ Cor 10: $e^A \in GL_n(K)$, et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ Ex 11: Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors $e^A \in O_n(\mathbb{R})$.Prop 12: Si $A = PBP^{-1}$ avec $P \in GL_n(K)$, alors $e^A = P e^B P^{-1}$ Cor 13: $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$ Rq 14: On retrouve que $e^A \in GL_n(K)$.2) Matrices nilpotentes et diagonalisablesProp 15: Soit $N \in M_n(K)$ nilpotente d'indice p . Alors $e^N = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{N^k}{k!}$ Def 16: On note $\ln(I_n + N) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} N^k$ pour N nilpotente d'ordre p . On note $\mathcal{U} = \{I_n + N / N \text{ nilpotente}\}$ l'ensemble des matrices unipotentes.Th 17: Si N est nilpotente, alors $\ln(I_n + N)$ et $e^N - I_n$ sont nilpotentes, et $\begin{cases} e^{\ln(I_n + N)} = I_n + N \\ \ln(e^N) = N \end{cases}$.
Ainsi $\exp: \{\text{matrices nilpotentes}\} \rightarrow \mathcal{U}$ est bijective, de réciproque $\ln$.Prop 18: $\exp(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$
pour $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$.Prop 19: Si $A \in M_n(K)$ est diagonalisable, alors e^A aussi, et $\text{Sp}(e^A) = \{e^\lambda / \lambda \in \text{Sp}(A)\}$.II - Etude de la fonction exp1) RégularitéProp 20: $\exp: M_n(K) \rightarrow M_n(K)$ est continue.Th 21: $\exp$ est de classe C^1 sur $M_n(K)$, et:
 $\forall A, H \in M_n(K)$, $d(\exp)_A(H) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=0}^{k-1} A^i H A^{k-1-i} \right)$ Cor 22: Soit $A \in M_n(K)$, alors $t \mapsto e^{tA}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = A e^{tA} = e^{tA} A$ App 23: A et B commutent. Soit $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB}$ 2) ImageTh 24 (Dunford): Soit $A \in M_n(K)$ tel que χ_A est scindé. Il existe un unique $(D, N) \in M_n(K)^2$ tel que $A = D + N$, $ND = DN$, N est nilpotent, D est diagonalisable. De plus, D et N sont des polynômes en A .Prop 25: Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $A = D + N$ la décomposition de Dunford. Alors la décomp. de Dunford de e^A est $e^A = e^D + e^D(e^N - I_n)$ Th 26: Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$, alors il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = e^{P(A)}$. En particulier, $\exp: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective, et $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Cor 27: Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $p \in \mathbb{N}^*$, alors $\exists R \in GL_n(\mathbb{C})$, $A = R^p$

C-ex 28: Si $A = J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ & & 0 \end{pmatrix}$, alors $\forall R \in GL_n(\mathbb{R})$, $A \neq R^2$ ($n \geq 2$)

Prop 29: Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors: $A \in \exp(M_n(\mathbb{R}))$ ssi $\exists R \in GL_n(\mathbb{R})$, $A = R^2$

C-Ex 30: Si $n \geq 2$, $\exp$ n'est pas injective sur $M_n(\mathbb{R})$ (donc pas sur $M_n(\mathbb{C})$ non plus). En effet, $\exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \cos(t)I_2 + \sin(t)J$

3) Restrictions remarquables

Prop 31: $\exp: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow SO_n(\mathbb{R})$ est surjective

Cor 32: $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs

DEV 1 Th 33: $\exp: S_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n^+(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

Prop 34: $\exp: H_n(\mathbb{C}) \rightarrow H_n^+(\mathbb{C})$ est aussi un homéomorphisme

App 35: (Décomposition polaire) $M_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$
 $(0, I) \mapsto I$
 est un homéomorphisme. En particulier, $GL_n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $M_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$

Prop 36: On a aussi $GL_n(\mathbb{C}) \simeq U_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{n^2}$

III - Application: systèmes différentiels linéaires

Def 37: Un système différentiel linéaire est une équation $Y' = A(t)Y + B(t)$ d'inconnue $Y: I \rightarrow M_{n,1}(\mathbb{R})$, de coefficients $A: I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ et de second membre $B: I \rightarrow M_{n,1}(\mathbb{R})$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$).
 Il est dit à coefficients constants si A est constante. Il est dit homogène si B est nulle.

Prop 38: Une équation différentielle scalaire linéaire d'ordre n se traduit par un système différentiel linéaire (de taille n).

Th 39: (Cauchy-Lipschitz linéaire) Si A et b sont continues, et si alors pour $Y_0 \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, le problème de Cauchy $(P_2) \begin{cases} Y' = A(t)Y + b(t) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$ admet une unique solution définie sur I .

Prop 40: Supposons A constante et b nulle. Alors la solution de (P_2) est $t \mapsto e^{(t-t_0)A} Y_0$.

App 41: Soit $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ un morphisme continu. Alors il existe $A \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \exp(tA)$

Ex 42: Etude de $Y' = AY$, où $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Si $\lambda, \mu < 0$, alors $\forall Y_0 \in M_{2,1}(\mathbb{R})$, $Y(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ (cf annexe)

Lemme 43: Soit $\|\cdot\|$ une norme algébrique sur $M_n(\mathbb{C})$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall \lambda \in \text{Sp}(A)$, $\text{Re}(\lambda) < 0$. Alors il existe $\alpha, C > 0$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\|e^{tA}\| \leq C e^{-\alpha t}$.

Th 44: Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$. On considère $(P_2) \begin{cases} Y' = f(Y) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$, et on suppose $\forall \lambda \in \text{Sp}(df_0)$, $\text{Re}(\lambda) < 0$. Alors si Y_0 est assez proche de 0, la solution maximale Y de (P_2) est définie sur $\mathbb{R}_+$, et $Y(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ tend exponentiellement vite vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Ex 45: Etude de $Y' = f(Y)$ avec $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x-y} \cos(x+y) - 1 \\ -e^{-x-y} \cos(x+y) + 1 \end{pmatrix}$

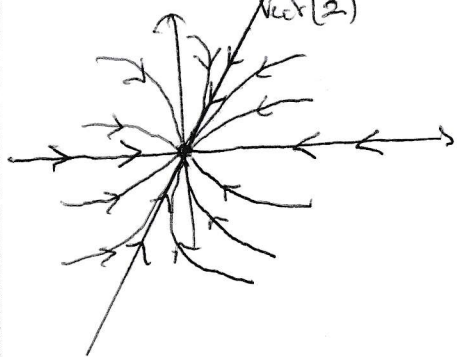
(cf annexe) alors $(0,0)$ est point d'équilibre stable.

En effet, $df_0\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-y \\ -y+x \end{pmatrix}$, et df_0 a pour valeurs propres $-1-i$ et $-1+i$.

DEV 2

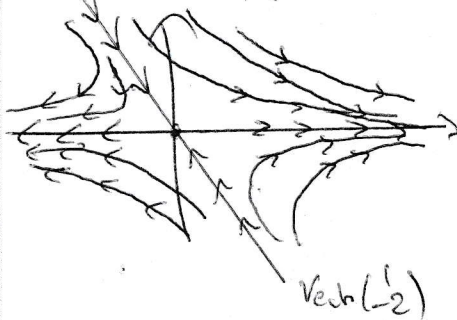
Annexe :

Ex 12 : Cas $\lambda = -3, \mu = -1$



0 est point d'équilibre
stable

Cas $\lambda = 1, \mu = -1$



0 est point d'équilibre
instable

Ex 15 : champs de vecteurs de df_0

