

[HAS]
[G] [IntL]
[GK]

205: Espaces complets Exemples et applications

(X, d) espace métrique

I - Notion de complétude

1) Suites de Cauchy [HAS] 107-109

- def
- prop
- x_n de Cauchy $\Leftrightarrow \exists!$ v.a
- stabilité par fct unif $C^0 \rightarrow C^0$

2) Espaces complets [G] 20 [HAS] 110-111

- def + ex $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ $\mathbb{C}^n$ $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$
- Prop pour A s.s. ensemb.
- produit d'espace complet

II - Exemples d'espaces complets

1) Espaces de Banach [G] 20-21 [HAS] 111 50-52

$(E, \|\cdot\|)$ EVN

- def
- ex $(B(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$
- evn de dim finie est complet
- $(\text{abs } cv \Rightarrow cv) \Leftrightarrow$ complet
- def $\mathcal{L}(E, F)$ + norme
- $\mathcal{L}(E, F)$ Banach si F Banach
- app $\text{Id} - u$ inversible

2) Espaces L^p [GK] 208-213 [IntL] 114

- def $\mathcal{L}^p \mathcal{L}^\infty$
- def/prop $\mathcal{L}^p$
- Ineq Young Holder Minkowski
- Riesz-Fischer

3) Espaces de Hilbert

- def préhilbertien
- def espace de Hilbert
- ex ℓ^2 et $C^0([a, b], \mathbb{K})$
- Th espace préhilbertien de dim finie = Hilbert
- CS + id Parallélogramme
- Th Projection
- Corollaire
- applications

DEV 1

III - Points fixes

1) Th du pt fixe

- def contractant
- Th

DEV 1a)

2) Applications

- CL linéaire
- Fct strict monotone

DEV 1b)

205: Espaces complets. Exemples et applications

Soit (X, d) un espace métrique.

I. Notion de complétude

1. Suites de Cauchy [HAS] 107-109

Définition 1: Une suite $(x_n)_n \subset X$ est dite de Cauchy si:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geq 0 \quad \forall n, m \geq N \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Proposition 2:

1. Toute suite convergente est de Cauchy.
2. Toute suite de Cauchy est bornée.
3. Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.

Proposition 3: Toute suite de Cauchy possédant une valeur d'adhérence est convergente. Cette valeur d'adhérence est alors unique et est la limite de la suite.

Proposition 4: L'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue est de Cauchy.

Exemple 5: L'hypothèse d'uniforme continuité est nécessaire. Soit $X = (0, +\infty)$, $f(x) = \frac{1}{x}$.
Pour $x_n = \frac{1}{n}$ suite de Cauchy

on a $f(x_n) = n$ qui n'est pas de Cauchy.

2. Espaces complets [G] 20 [HAS] 110-111

Définition 6: On dit que (X, d) est complet si toutes les suites de Cauchy convergent.

Exemple 7: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ sont complets
 $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ n'est pas complet.

Proposition 8: Soit $A \subset X$.

1. Si A est complet alors A est fermé dans X .
2. Si $\bar{A} = X$ et $A \neq X$ alors A n'est pas complet.
3. Si (X, d) est complet et A fermé dans X alors A est complet.

Proposition 9: Soit $(X_i, d_i) \in \llbracket 1, n \rrbracket$ une famille d'espaces métriques.

Alors $X_1 \times \dots \times X_n$ est complet si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (X_i, d_i) est complet.

II. Exemples d'espaces complets

1. Espaces de Banach [G] 20-21 [HAS] 111

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé

Définition 10: On dit qu'un espace vectoriel normé est un espace de Banach s'il est complet.

Exemple 11: Soit $B(X, \mathbb{R}) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R}, \text{ bornée} \}$
et $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Alors $(B(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un Banach.

Proposition 12: Tout e.v.n de dimension finie est complet.

Proposition 13: Un e.v.n est complet si et seulement si toute série convergente en norme est convergente.

Définition 14: Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n. On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continue de E dans F .

On pose: $\forall f \in \mathcal{L}_c(E, F) \quad \|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|_F$

Alors $(\mathcal{L}_c(E, F), \|\cdot\|)$ est un e.v.n.

Proposition 15: Si F est un Banach alors $\mathcal{L}_c(E, F)$ est un Banach.

Application 16: Soit E un espace de Banach et $u \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $\|u\| < 1$.

Alors $\text{Id} - u$ est inversible d'inverse $\sum_{n \geq 0} u^n$

2. Les espaces L^1 . [GK] 203-213

Définition 17: Soit $p \in [1, +\infty)$ [Int 2] 114

On note $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{mesurable}, \|f\|_1 < +\infty\}$
avec $\|f\|_1 = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \right)^{1/p}$

on note $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) = \{f, \|f\|_\infty\}$

avec $\|f\|_\infty = \inf \{M \in \mathbb{R}, |\{x \in \mathbb{R}, |f(x)| > M\}| = 0\}$

Proposition 18: Soit $f \in \mathcal{L}^1$ et $g = f$ presque partout. Alors $g \in \mathcal{L}^1$.

On pose la relation d'équivalence:

$f \sim g \iff f = g$ presque partout.
Et on note $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1 / \sim$

Lemme 19: (inégalité de Young)

Soit $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Alors $\forall u, v \in \mathbb{R}^+ \quad uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$

Théorème 20: (inégalité de Hölder)

Soit $p, q \in [1, +\infty]$ exposants conjugués, $f \in \mathcal{L}^p, g \in \mathcal{L}^q$

Alors $fg \in \mathcal{L}^1$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$

Théorème 21: (inégalité de Minkowski)

Soit $p \in [1, +\infty]$, $f, g \in \mathcal{L}^p$.

Alors $f+g \in \mathcal{L}^p$ et $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Théorème 22: (Riesz-Fisher)

Pour tout $p \in [1, +\infty]$ $(\mathcal{L}^p, \|\cdot\|_p)$ est un Banach. [DEV 1]

3. Espaces de Hilbert. [HAS] 480-491

Définition 23: Un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel H muni d'un produit scalaire est appelé espace pré-hilbertien. Tout produit scalaire induit une norme ($\forall x \in H \quad \sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|$)

Définition 24: On appelle espace de Hilbert un espace pré-hilbertien qui est complet pour la norme induite par le produit scalaire.

Exemples 25 • $(\ell^2(I), \|\cdot\|_2)$ est un espace de Hilbert

• $C^0([0,1], \mathbb{K})$ avec $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)} dt$ n'est pas un Hilbert

Proposition 26 Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert

Lemme 27 Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{K}$ -espace préhilbertien $\forall x, y \in H$ on a

1) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ (Cauchy-Schwarz)

2) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (identité du parallélogramme)

Théorème 28 (Projection sur un convexe fermé)

Soit H un Hilbert et C une partie convexe fermée non vide de H . Alors $\forall x \in H, \exists ! y \in C$ tel que $\|x-y\| = d(x, C) = \inf_{z \in C} \|x-z\|$

On dit que $y = P_C(x)$ est la projection de x sur C .

Elle est caractérisée par

$\forall z \in C, \operatorname{Re}(\langle x-y, z-y \rangle) \leq 0$

DEV2

Corollaire 29: L'application $P_C: H \rightarrow C$ est 1-Lipschitz.

III - Points fixes

1) Théorème du point fixe [HAS] 96

Définition 30 Soit $f: (X, d) \rightarrow (Y, d')$. On dit que f est k -contractante s'il existe $k \in [0, 1[$ tel que $\forall x, y \in X, d'(f(x), f(y)) \leq k d(x, y)$

Théorème 31 Soit $f: (X, d) \rightarrow (X, d)$ application k -contractante et (X, d) espace métrique complet. Alors

1) f possède un unique point fixe $z \in X$

2) Toute suite de la forme $\{x_n \in X, x_{n+1} = f(x_n)\} \forall n \in \mathbb{N}$ converge vers ce point fixe z .

2) Applications [G] 350

Théorème 32: On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ et $\|\cdot\|$ la norme associée.

une application $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite strictement monotone s'il existe $k > 0$ tel que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \langle f(x) - f(y), x - y \rangle \geq k \|x - y\|^2$ (*)

On a alors

1) $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $C^1 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall v \in \mathbb{R}^n$ vérifie (*) $\langle Df(x)(v), v \rangle \geq k \|v\|^2$

2) Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 vérifie (*) alors f est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$

DEV3

Théorème 33 (Cauchy-Lipschitz linéaire)

Soit $J \subset \mathbb{R}$ intervalle, E un espace de Banach.

$A: J \rightarrow \mathcal{L}(E)$ continue, $b: J \rightarrow E$ continue, $t \in J, x_0 \in E$. Alors $\exists ! x \in C^1(J, E)$ tel que $\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \forall t \in J$

Parfois des suites CV mais
pas dans l'espace d'où l'idée
de complétude

Espace complet
= suite de Cauchy
CV

$(\mathbb{R}, |\cdot|)$ $(\mathbb{C}, |\cdot|)$
 $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$

205: Espaces complets Exemples et applications

suite de Cauchy?

$\forall \varepsilon > 0 \exists$ rang pour lequel les
termes de la suite sont proches

↳ pains de propriétés:

- * bornée
- * suite CV $\Rightarrow$ de Cauchy
- * ss suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy

Dans un espace complet
on peut savoir si une
suite converge ou non
sans savoir la limite
Existence de la limite

dépend de la
distance associée

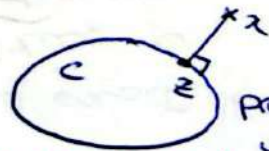
$(\mathbb{R}, d)$ avec $d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$
pas complet

Existence pt fixe

Point fixe

caractérisation des
fonctions strictement
monotone
 $\rightarrow C^1$ difféo.

Dans un espace complet
les fct k contractantes
admettent un! pt fixe



Projection sur
un convexe fermé **DEV2**
Existence de la projection

Exemples

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$

Espaces de Banach
EVN + complet
= Banach

$\rightarrow$ En dim finie les
EVN sont des Banach
(équivalence normes)

Espaces Hilbert

généralisation espaces euclidiens
hermitien en dim ∞

$\rightarrow$ nombreux outils géométrique
 $\rightarrow \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

$\rightarrow$ Hilbert = préhilbertien complet

Holder et Minkowski

Th Riesz-Fischer
 $(L^p, \|\cdot\|_p)$ Banach

DEV1