

Références :

Histoires hédonistes de groupes et de géométries, Phillippe Caldero

Théo. *L'application $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.*

Démonstration.

- Montrons que cette application est bien définie et qu'elle est continue. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = P \text{diag}(\lambda_i) P^{-1}$ et les λ_i sont des réels. On a donc

$$\exp(S) = P \text{diag}(e^{\lambda_i}) P^{-1} = P \text{diag}(e^{\lambda_i})^t P \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

car $e^{\lambda_i} > 0$ pour tout i et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, l'exponentielle envoie bien $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et par restriction, elle est continue.

- Montrons la surjectivité de cette application. Soit $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On a donc $B = P \text{diag}(\mu_i) P^{-1}$ avec $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mu_i > 0$, pour tout i . Alors la matrice $A = P \text{diag}(\ln(\mu_i)) P^{-1}$ est symétrique et l'on $\exp(A) = B$ d'où la surjectivité.
- Montrons l'injectivité. Soit $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $\exp(A) = \exp(A')$. Il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P \text{diag}(\lambda_i) P^{-1}$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Soit Q un polynôme interpolateur de Lagrange tel que $Q(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$ et on a donc $Q(e^A) = A$.

En considérant $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs distinctes de λ_i , on a

$$Q(X) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \prod_{i \neq j} \frac{X - e^{\lambda_j}}{e^{\lambda_i} - e^{\lambda_j}}.$$

Puisque $e^{A'} \in \mathbb{C}[A']$, on a que A' commute avec $e^{A'} = e^A$. En particulier, A' commute donc avec $Q(e^A) = A$. On utilise maintenant le théorème de diagonalisation simultanée. Il existe donc $R \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{aligned} A_1 &= R \text{diag}(\lambda_i) R^{-1} \\ A_2 &= R \text{diag}(\mu_i) R^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi, comme $e^{A_1} = e^{A_2}$ alors, pour tout i , $e^{\lambda_i} = e^{\mu_i}$. Or comme \exp est injective dans \mathbb{R} , on obtient $\lambda_i = \mu_i$ et $A = A'$.

- Montrons que la réciproque est continue.

On munit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_2$ issue de la norme 2 sur \mathbb{R}^n . ($\|A\|_2 = \sup_{\|X\|_2=1} \|AX\|_2$ où $\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$)

Soit $(A_p)_{p \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}_n^{++}$ qui converge vers $A \in \mathcal{S}_n^{++}$. Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $B_p \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $A_p = e^{B_p}$ et il existe $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = e^B$.

Montrons que $\lim_{p \rightarrow \infty} B_p = B$ au sens de la norme $\|\cdot\|_2$.

On définit $\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$. On a, pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_2 = \rho(A)$.

En effet,

$$\begin{aligned} \rho(A) &= \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda| \\ &= |\lambda_0| \text{ car le maximum est atteint} \\ &= \|\lambda_0 X\|_2 \text{ pour } X \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|X\|_2 = 1 \text{ et } AX = \lambda_0 X \\ &= \|AX\|_2 \\ &\leq \|A\|_2. \end{aligned}$$

Comme $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P \text{diag}(\lambda_i) P^{-1}$. On a donc :

$$\begin{aligned} \|AX\|_2 &= \|P \text{diag}(\lambda_i) P^{-1} X\|_2 \\ &= \|P \text{diag}(\lambda_i) Y\|_2 \\ &= \|\text{diag}(\lambda_i) Y\|_2 \text{ car } P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \\ &= \left\| \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix} \right\|_2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^n (\lambda_i y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n (\lambda_i)^2 (y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \rho(A)^2 (y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \rho(A) \|Y\|_2 \\ &\leq \rho(A) \end{aligned}$$

On sait que $\|A_p\|_2 \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \|A\|_2$ et donc $\rho(A_p) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \rho(A)$. On a donc que $(\rho(A_p))$ est bornée.

Ainsi, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $\lambda \in \text{Sp}(A_p)$, $|\lambda| \leq C$.

Par continuité du passage à l'inverse, on a que A_p^{-1} converge en norme $\|\cdot\|_2$ vers A^{-1} . Par le même raisonnement, il existe $C' > 0$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $\mu \in \text{Sp}(A_p^{-1})$, $|\mu| \leq C'$.

Or comme, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A_p \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$, on a $\text{Sp}(A_p^{-1}) = \{\mu \in \mathbb{R}, \frac{1}{\mu} \in \text{Sp}(A_p)\}$. On obtient donc que, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $\lambda \in \text{Sp}(A_p)$, $|\lambda| \geq \frac{1}{C'}$. Ainsi, toutes les valeurs propres des A_p sont contenues dans le compact $[\frac{1}{C'}, C] \subset]0, +\infty[$.

Ainsi, les valeurs propres de B_p sont inclus dans le compact $[-\ln(C'), \ln(C)]$ et donc $\rho(B_p) = \|B_p\|_2 \in [\ln(C'), \ln(C)]$.

Ainsi, B_p est bornée pour la norme $\|\cdot\|_2$ donc il existe $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $B_{\phi(p)} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} B_0$.

On obtient donc, d'une part

$$A_{\phi(p)} = e^{B_{\phi(p)}} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} e^{B_0} \text{ par continuité de exp}$$

et d'autre part

$$A_{\phi(p)} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} A = e^B$$

Ainsi $B_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} B$.

□