Références :
Oraux XENS Analyse 1, Serge Francinou

Théo. *Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}/$$

Alors, il existe $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

*γ est appelé la **constante d'Euler**.*
De plus, si on pose $k_n = \min\{k \in \mathbb{N}, H_k \geq n\}$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = e$.

Démonstration. • Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = H_n - \ln(n) \text{ et } v_n = u_n - \frac{1}{n}.$$

Montrons que ces suites sont adjacentes.
La différence $u_n - v_n = \frac{1}{n}$ est positive et converge vers 0.
On a

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln(n) \\
&= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\
&\leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \text{ car pour } x > -1, \ln(1+x) \leq x \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

On a, de plus,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - \frac{1}{n+1} - u_n + \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) \\
&= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&\geq 0 \text{ car pour } x > -1, \ln(1+x) \leq x
\end{aligned}$$

Les deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes et convergent vers $\gamma \in \mathbb{R}$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\gamma \geq v_n \geq v_2 = 1 - \ln(2) > 0$.
On a donc obtenu

$$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

• Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $t_n = u_n - \gamma$.
On va chercher un équivalent de $t_n - t_{n-1}$. On a, pour n tendant vers l'infini,

$$\begin{aligned}
t_n - t_{n-1} &= u_n - u_{n-1} \\
&= \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\
&= -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}
\end{aligned}$$

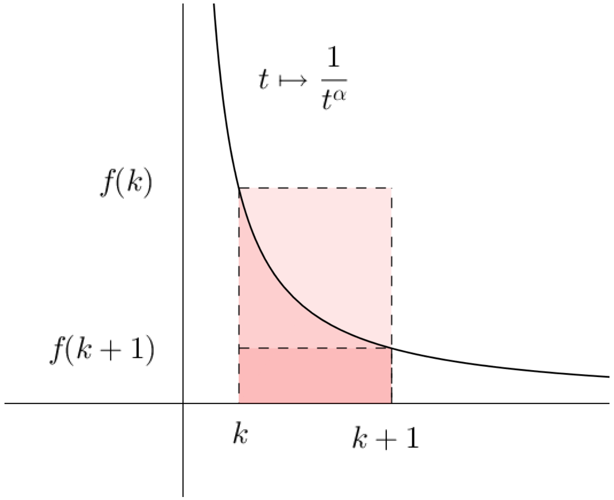
Ainsi, la série $\sum(t_k - t_{k-1})$ converge. Le théorème de sommation des équivalents nous donne

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (t_k - t_{k-1}) = -t_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Lemme. Soit $\alpha > 1$, alors $\sum_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Démonstration. Si $\alpha > 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable et décroissante sur $[1, +\infty[$. Ainsi, si $k \geq 2$

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}.$$



En sommant cela entre $n+1$ et N puis en faisant tendre N vers l'infini, on obtient

$$\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

De plus, on a, pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\int_n^N \frac{dt}{t^\alpha} &= \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_n^N \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{N^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \\
&\underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}
\end{aligned}$$

De la même manière,

$$\int_{n+1}^N \frac{dt}{t^\alpha} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

On obtient donc

$$\sum_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

$\square$

Si on applique le lemme pour $\alpha = 2$, on obtient $t_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.
On a donc obtenu

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

- Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = u_n - \gamma - \frac{1}{2n}$.
La somme $\sum_{k=n+1}^{+\infty}(w_k - w_{k-1})$ vaut $-w_n$ et son terme général s'écrit

$$\begin{aligned}
w_n - w_{n-1} &= \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2} \\
&= \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\frac{1}{1-\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

Pour n tendant vers l'infini, on a

$$\begin{aligned}
w_n - w_{n-1} &= -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= -\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{6n^3}
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$w_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{6k^3} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2} \text{ par le lemme.}$$

On obtient ainsi le développement asymptotique

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

- Montrons que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = e$.
  On sait que $H_n = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$ où $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Par définition de k_n, on a

  $$\ln(k_n) + \gamma + \varepsilon_{k_n} \geq n$$

  et

  $$\ln(k_n - 1) + \gamma + \varepsilon_{k_n - 1} < n.$$

  En passant à l'exponentielle, on obtient

  $$e^n e^{-\gamma-\varepsilon_{k_n-1}} + 1 > k_n \geq e^n e^{-\gamma-\varepsilon_{k_n}}$$

  On a donc que $k_n \underset{n\to\infty}{\sim} e^n e^{-\gamma}$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = e$.

  □

Leçons possibles : 224 - 230