

204: Connexité. Exemples et applications

I- Notion de connexité

Soit (X, d) un espace métrique.

Déf 1: X est dit connexe si ses seules parties ouvertes et fermées sont $\emptyset$ et X .

Rem 2: De manière équivalente, X est connexe si il n'est pas réunion de deux ouverts (ou fermés) disjoints non vides.

Ex 3: • Un ensemble fini de points du plan est connexe si il n'y en a qu'un.
• $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe.

Ex 4: Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Thm 5: L'image d'un connexe par une application continue est connexe.

Ex 6: $GL_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R})$ ne sont pas connexes.

App 7: (TVI) L'image d'un intervalle par une application continue à valeurs réelles est un intervalle.

Prop 8: X est connexe si toute application continue $\varphi: X \rightarrow \mathbb{D}$, avec $\mathbb{D}$ discret, est constante.

App 9: Soient $g_1, g_2: X \rightarrow \mathbb{C}$, avec X connexe.
 $\varphi: e^{2i\pi g_1} = e^{2i\pi g_2}$, alors $g_1 - g_2 = \text{constante} \in \mathbb{Z}$.

Prop 10: Si $A \subset B \subset \bar{A} \subset X$, avec A connexe, alors B est connexe. En particulier, $\bar{A}$ est connexe.

Prop 11: Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de parties connexes tq $\exists i_0 \in I, \forall i \in I, A_i \cap A_{i_0} \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe.

App 12 (Darboux) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Soit I un intervalle non vide. Alors $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

II- Notions connexes

Déf 13: X est dit connexe par arcs si $\forall a, b \in X$, $\exists \gamma: [0, 1] \rightarrow X$ continue tq $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

Prop 14: L'image d'un connexe par arcs par

une application continue est connexe par arcs.

Prop 15: Une partie connexe par arcs est connexe.

Ex 16: • $\Gamma = \left[\bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\} \times \mathbb{R}_+ \right] \cup \left[\bigcup_{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} \{x\} \times \mathbb{R}_+^* \right]$ est connexe, mais pas connexe par arcs.
• De même, l'adhérence du graphe $\{(x, \sin(\frac{1}{x})) : x > 0\}$ est connexe mais pas connexe par arcs.

Ex 17: $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, donc connexe. L'ensemble des matrices de rang n est connexe dans $M_n(\mathbb{C})$.

Ex 18: Dans $\mathbb{R}^n$, la sphère euclidienne est connexe par arcs donc connexe.

Il existe alors deux points diamétralement opposés sur l'axe de températures identiques.

Prop 19: Dans un $\mathbb{K}$ -ev ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), un ouvert est connexe si il est connexe par arcs si il est connexe par lignes brisées.

Déf 20: Dans un $\mathbb{K}$ -ev, une partie C est dite convexe si $\forall x, y \in C, \forall t \in [0, 1], tx + (1-t)y \in C$.

Déf 21: Dans un $\mathbb{K}$ -ev, une partie E est dite étoilée s'il existe un point $a \in E$ tq $\forall x \in E$, le segment $[a, x] \subset E$.

Ex 22: L'ensemble N des opérateurs normaux d'un espace de Hilbert H est connexe par arcs dans $\mathcal{L}(H)$ (et même étoilé par rapport à 0), mais n'est pas convexe dès que $\dim(H) \geq 2$.

Rem 23: convexe $\Rightarrow$ étoilé $\Rightarrow$ connexe par lignes brisées $\Rightarrow$ connexe par arcs $\Rightarrow$ connexe.

III- Composantes connexes

Prop 24: La relation binaire sur X :

$x \sim y$ si $\exists C \subset X$ connexe tq $x, y \in C$ est une relation d'équivalence.

Déf 25: On appelle composantes connexes de X les classes d'équivalences de la relation $\sim$. La classe d'équivalence de x pour $\sim$ se note $\mathcal{C}(x)$ et s'appelle la composante connexe de x .

Prop 26: Soit $x \in X$. $\mathcal{C}(x)$ est la réunion de tous les connexes contenant x . En particulier, c'est la plus grande partie connexe contenant x .

Ex 27: Les composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$ sont $GL_n(\mathbb{R})^+ = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) : \det(M) > 0\}$ et $GL_n(\mathbb{R})^- = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) : \det(M) < 0\}$.

Prop 28: Les composantes connexes de X sont fermées dans X .

Ex 29: Les composantes connexes ne sont pas ouvertes en général:

→ les composantes connexes de $\mathbb{Q}$ sont les singletons, qui ne sont pas ouverts dans $\mathbb{Q}$.

Prop 30: Soit Y un esp. métrique, et supposons X connexe.

Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue. Fixons $x_0 \in X$. Alors, $\forall x \in X$, $f(x) \in \mathcal{B}(f(x_0))$.

App 31 (Disques de Gerschgorin)

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On note pour $i \in \{1, \dots, n\}$, $D_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\}$ (i -ème disque de Gerschgorin).

Alors $\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^n D_i$.

Plus précisément, dans chaque composante connexe de $\bigcup_{i=1}^n D_i$, on compte exactement autant de valeurs propres de A (comptées avec multiplicité algébrique) que de disques de Gerschgorin.

Prop 32: (1) Si X est connexe, une application localement constante sur X est constante.

($f: X \rightarrow Y$ est dite localement constante si $\forall x \in X$, il existe un voisinage de x sur lequel f vaut $f(x)$).

(2) Une application localement constante sur X est constante sur les composantes connexes.

Ex 33: Une fonction dérivable [resp. différentiable] sur un ouvert de $\mathbb{R}$ [resp. de $\mathbb{R}^n$] et de dérivée nulle [resp. différentielle nulle] est constante sur les composantes connexes.

App 36: Soit γ une courbe fermée $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et soit $\text{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}$ l'indice ^{de $a \in \mathbb{C}$} par rapport à γ .

Alors l'indice est constant sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$, et nul sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$.

Ex 37: Si $\gamma = C(a, r)$ orienté dans le sens direct, alors: $\begin{cases} \text{Ind}_\gamma(z) = 0 & \text{si } |z-a| > r \\ \text{Ind}_\gamma(z) = 1 & \text{si } |z-a| < r \end{cases}$

Prop 38: Si $X = \bigcup_{i \in I} \omega_i$ où les ω_i sont ouverts connexes non vides, alors les ω_i sont les composantes connexes de X .

Prop 39: Si V est un ouvert de $\mathbb{R}$, il existe $(a_i, b_i)_{i \in I}$ avec I au plus dénombrable tels que $V = \bigcup_{i \in I}]a_i, b_i[$.

Rem 40: La mesure de Lebesgue de V est alors $\sum_{i \in I} (b_i - a_i)$.

IV - Utilisation majeure de la connexité

1) Applications en analyse complexe

Thm 41 (Runge): Soit K un compact de $\mathbb{C}$, de complémentaire connexe, et $a \in K^c$. Alors la fonction holomorphe $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ définie au voisinage de K est limite uniforme sur K de polynômes.

Thm 42 (Runge fort): Soit K un compact de $\mathbb{C}$ de complémentaire connexe, et soit f une fonction holomorphe sur un voisinage de K . Alors f est limite uniforme sur K de polynômes.

Cor 43: Soit K un compact de $\mathbb{C}$, mais de complémentaire non-connexe.

Soit $a \in \omega$, où ω est une composante connexe bornée de K^c .

Alors, pour tout $z \in K$, $\left| \frac{1}{z-a} - p(z) \right| > \frac{1}{\sup_{t \in K} |t-a|}$ $\forall p \in \mathbb{C}[X]$.

Prop 44 (Principe du maximum): Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et f une fonction holomorphe sur Ω . On suppose Ω borné, et que f est continue sur $\bar{\Omega}$.

Alors $|f|$ atteint son maximum sur $\partial\Omega$:

$$\sup_{z \in \bar{\Omega}} |f(z)| = \sup_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$$

App 45: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et f holomorphe sur U non constante. Si $|f|$ admet un minimum local, alors celui-ci est nul.

Déf 1

Déf 1

App 46: Soient U un ouvert connexe, D un disque ouvert tel que $\overline{D} \subset U$ et f holomorphe sur U , non constante.

Si $|f|$ est constante sur ∂D , alors f possède un zéro dans D .

Thm 47 (Principe du prolongement analytique):

Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $a \in U$ et f holomorphe sur U .

Les conditions suivantes sont équivalentes:

- (i) f est identiquement nulle sur U .
- (ii) f est identiquement nulle sur un voisinage de a .
- (iii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(a) = 0$.

Coro 48: Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f, g holomorphes sur U . Si f et g coïncident au voisinage d'un point de U , alors $f = g$.

App 49: (Principe des zéros isolés) Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f holomorphe sur U , non nulle.

Alors l'ensemble des zéros de f est une partie discrète et fermée de U .

App 50: Une fonction holomorphe (non nulle) sur un voisinage d'un compact K de $\mathbb{C}$ possède un nombre fini de zéros.

Ex 51: La fonction Gamma définie sur $\{z: \operatorname{Re}(z) > 1\}$ par:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt$$

est prolongeable analytiquement sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$, i.e. qu'il existe $f: \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_- \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe qui coïncide avec Γ sur $\{z: \operatorname{Re}(z) > 1\}$.

2.1 Équations différentielles

Thm 52 (Cauchy-Lipshitz global): Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et globalement lipshitzienne par rapport à la variable x , uniformément par rapport à la variable t .

Alors le problème de Cauchy $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

admet une unique solution globale.

App 53: Sous les hypothèses du Thm 52, si x et $\tilde{x}$ sont deux solutions de $y' = f(t, y(t))$, qui coïncident en un point de I , alors elles coïncident sur tout I .

En particulier, deux trajectoires différentes

ne peuvent pas se croiser.

Ex 54: Soit l'EDO $y' = \sin(y)$, et x une solution globale.

Alors si $\pi k \leq x(0) < \pi(k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, on a $\forall t \in \mathbb{R}$, $\pi k \leq x(t) < \pi(k+1)$.

Thm 55: (Théorème des bouts) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$ et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue, localement lipshitzienne par rapport à la variable x .

Soit $y:]c, d[\rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution maximale de $y' = f(t, y)$. Alors $(t, y(t))$ sont de tout compact de Ω quand $t \rightarrow d$.

Rem 56: Dans le cas où $\Omega =]a, b[\times \mathbb{R}^n$, on peut reformuler le théorème par:

Si $d < b$, alors $\|y(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow d]{} +\infty$.

App 57: Les solutions maximales à une EDO linéaire sont globales (et plus précisément, à une EDO $y' = f(t, y)$ telle que $\|f(t, y)\| \leq a(t) + b(t)\|y\|$ avec a, b continues)

Thm 58: (Stabilité de Lyapounov) Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, de classe $\mathcal{C}^2$, et $v^* \in U$ tq $f(v^*) = 0$.

(1) Si le spectre de $df(v^*)$ est inclus dans $\{\lambda: \operatorname{Re}(\lambda) < 0\}$, alors v^* est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour l'EDO $y' = f(y)$.

(2) Si $df(v^*)$ possède une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors v^* est un point d'équilibre instable pour l'EDO $y' = f(y)$.

2.2

Annexe :

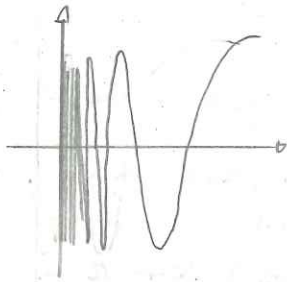
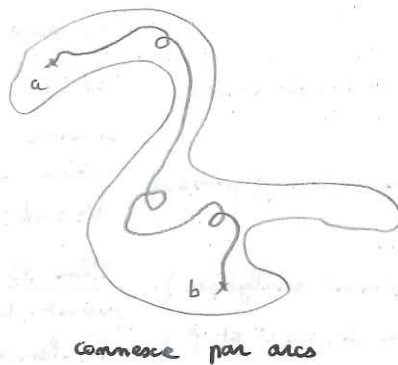
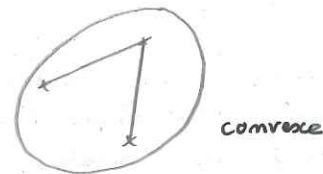


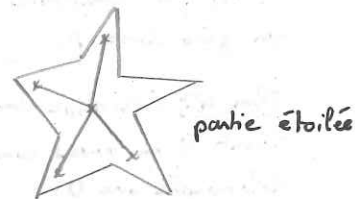
Figure 1: Graphe de $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$



connexe par arcs



convexe



partie étoilée

Figure 2: Représentation des différents notions de connexité

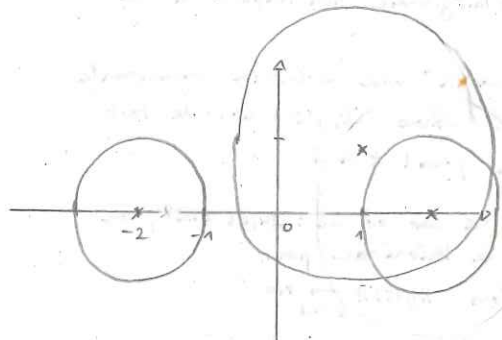


Figure 3: Disques de Gerschgorin de la matrice :

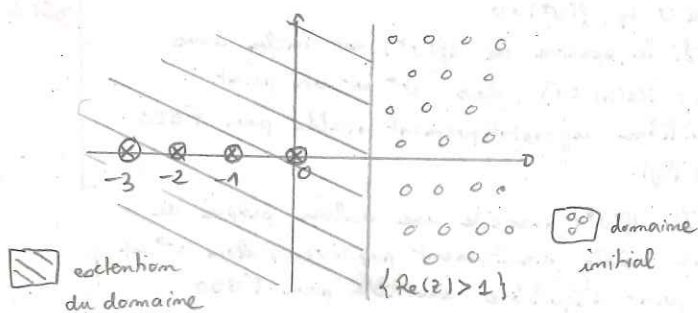
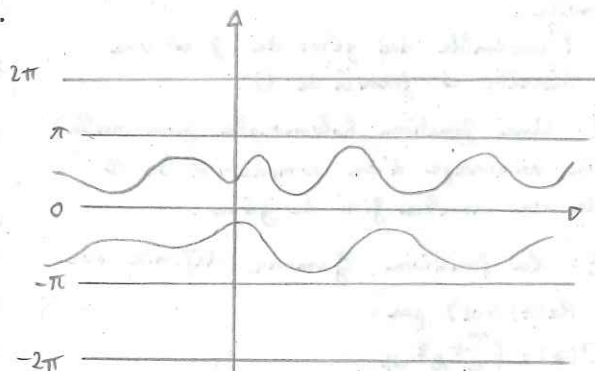
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1+1i \end{pmatrix}$$

$$\text{Ind}_\gamma(0) = 1$$

$$\text{Ind}_\gamma(0) = 0$$

$$\text{Ind}_\gamma(0) = -2$$

Figure 4: Indices par rapport à certaines courbe du point 0.



domaine initial

Figure 5: Prolongement de Γ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$.

Figure 6: Solutions qualitatives de $y' = \sin(y)$