

Nom:

Prénom:

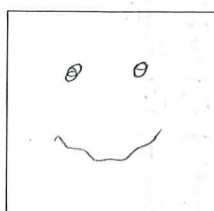
Numéros des sujets tirés:

171

Intitulé du sujet choisi:

Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

Numéro de Jury:



Dans ce qui suit, E désigne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

I) Généralités sur les formes quadratiques

1) Premières définitions

Définition 1: Une application $q: E \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée forme quadratique (réelle) s'il existe une forme bilinéaire symétrique $b: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in E, b(x, x) = q(x)$.

Remarque 2: Une telle forme bilinéaire symétrique est unique et est donnée par $b(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$.

Définition 3: Si $q: E \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme quadratique, la forme bilinéaire symétrique vérifiant $b(x, x) = q(x)$ est appelée forme polaire de q .

Exemple 4: Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ est un espace préhilbertien, la norme $x \mapsto \|x\|$ est une forme quadratique et sa forme polaire est le produit scalaire associé $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

• L'application $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y, z, t) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - t^2$
est une forme quadratique, de forme polaire
 $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} \right) \mapsto xx' + yy' + zz' - tt'$.

Remarque 5: À une forme quadratique q de forme polaire b , on associe une application linéaire

$$\begin{aligned} \phi_q: E &\longrightarrow E^* \\ x &\longmapsto \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto b(x, y) \end{cases} \end{aligned}$$

Définition 6: On appelle rang, noyau, matrice d'une forme quadratique q le rang, le noyau, la matrice de ϕ_q .
 q est dite non dégénérée si ϕ_q est injective.

Remarque 7: Si E est de dimension finie et a une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, la matrice de q dans cette base est $(b(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$.

Exemple 8: Soit $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie dans la base canonique par
 $q(x) = x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 3x_2x_3$.
Sa matrice dans la base canonique est
 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$. C'est donc une forme quadratique dégénérée, de rang 2 et de noyau $\mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 3: (Changement de base) Supposons E de dimension finie. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Si A et A' sont les matrices respectives de q dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ alors
 $A' = {}^t P A P$.

Définition 10: Un vecteur $x \in E$ tel que $q(x) = 0$ est appelé vecteur isotrope.
L'ensemble des vecteurs isotropes est appelé cône isotrope de q .

Exemple 11: $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x_1, x_2) \mapsto x_1^2 - x_2^2$ a pour cône isotrope l'ensemble $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = \pm x_1\}$.

2) Algorithme de Gauss

On suppose dorénavant E de dimension finie.

Proposition 12: Toute forme quadratique sur E s'écrit (par un procédé algorithmique) comme une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes.

Exemple 13: La forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^4$ par

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + x_2x_3 + x_2x_4 \quad \text{peut s'écrire:}$$

$$q(x) = (x_1 + x_3)^2 + \frac{1}{4}(x_2 + x_3 + x_4)^2 - \frac{1}{4}(x_2 - x_3 - x_4)^2$$

II) Théorèmes de réduction

1) Théorème de Sylvester

On considère toujours une forme quadratique q de forme polaire b sur E de dimension finie n .

Définition 14: Une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E est dite orthogonale pour q si

$$b(e_i, e_j) = 0 \quad \text{pour tous } i \neq j$$

i.e. si la matrice de q dans cette base est diagonale.

Théorème 15: Il existe des bases de E orthogonales pour q .

Théorème 16 (Sylvester): Il existe un unique couple d'entiers (s, t) et une base de E tels que la matrice de q dans cette base est

$$\begin{pmatrix} I_s & & 0 \\ & -I_t & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Définition 17: Le couple (s, t) est appelé signature de la forme quadratique.

Remarque 18: Reformulation matricielle en termes d'action de groupe:

On considère l'action à droite de $GL_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ par conjugaison $(A, P) \mapsto bPAP$.

Chaque orbite contient une unique matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_s & & 0 \\ & -I_t & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ où $s, t \in \mathbb{N}$.

Exemple 19: La signature de la forme quadratique de l'exemple 13 est $(2, 1)$.

Celle de la forme quadratique $(x, y, z, t) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ est $(3, 1)$.

Remarque 20: Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthogonale pour q , (s, t) est l'unique couple d'entiers tel que $q(e_i) > 0$ pour s indices i , $q(e_i) < 0$ pour t indices i et $q(e_i) = 0$ pour les éventuels vecteurs restants.

Remarque 21: L'algorithme de Gauss permet de déterminer la signature d'une forme quadratique.

2) Réduction simultanée

Théorème 22 (Théorème spectral): Si E est muni d'une structure euclidienne $\langle \cdot, \cdot \rangle$, il existe des bases qui sont orthogonales à la fois pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et pour q .

Application 23: Traduction matricielle: Toute matrice symétrique réelle est semblable à une matrice diagonale via une matrice de passage orthogonale.

Corollaire 24: (Réduction simultanée) Si $A \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{Y}_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPBP = I_n$ et ${}^tPAP = D$ où D est une matrice diagonale.

Lemme 25: Soient $A, B \in \mathcal{Y}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in [0, 1]$ tels que $\alpha + \beta = 1$. Alors $\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$ et si $A \neq B$, $\alpha, \beta \neq 0$, l'inégalité est stricte.

Application 26: (Ellipsoïde de John - Levenberg) Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide.

- Il existe un unique ellipsoïde centré en O de volume minimal contenant K .
- Il existe un unique ellipsoïde de volume minimal contenant K .

Exemple 27: L'ellipse (pleine) d'axe minimal contenant un triangle équilatéral est son cercle circonscrit.

3) Un exemple important: la Hessienne.

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert.

Définition 28: Si $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ est deux fois différentiable en $a \in U$, sa différentielle seconde $d^2f(a)$ est (identifiée à) une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$ et sa matrice dans la base canonique est appelée Hessienne de f en a , notée $H_f(a)$.

Proposition 29: (Formule de Taylor - Young à l'ordre 2) Si $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ est deux fois différentiable en $a \in U$, alors

$$f(a+h) = f(a) + df(a) \cdot h + \frac{1}{2} d^2f(a)(h, h) + o(\|h\|^2)$$

Proposition 30: Sous les mêmes hypothèses:

- Si f admet en a un minimum local, alors $H_f(a) \in \mathcal{Y}_n^+(\mathbb{R})$.
- Si $\nabla f(a) = 0$ et $H_f(a) \in \mathcal{Y}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors f admet un minimum strict en a .

Exemple 31: $h: (x, y, z) \mapsto (x+y)^2 + \sin(xz) + \frac{z^2}{2}$ a un unique point critique sur $\mathbb{R}^3$, 0, et sa Hessienne en 0 est de signature (2, 1) donc h n'admet pas d'extremum local en 0. Elle n'admet donc aucun extremum local.

Proposition 32: Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ donc fois différentiable sur U .

- f est convexe si et seulement si $H_f(a) \in \mathcal{H}_m^+(\mathbb{R})$ pour tout $a \in U$
- Si $H_f(a) \in \mathcal{H}_m^+(\mathbb{R})$ pour tout $a \in U$ alors f est strictement convexe.

III) Coniques

1) Vocabulaire de base

Définition 33: Une conique est une courbe plane définie par une équation de degré 2 :

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Exemple 34: La conique définie par $x^2 - y^2 = 0$ est une paire de droites sécantes, le cercle de centre (1, 1) et de rayon 11 est une conique d'équation $(x-1)^2 + (y-1)^2 - 121 = 0$.

Remarque 35: L'équation d'une conique peut s'écrire $q(x, y) + R(x, y) + f = 0$ avec q une forme quadratique et R une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$.

On associe à une conique une seconde forme quadratique, son homogénéisée $Q(x, y, z) = ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2$.

Définition 36: Si Q est dégénérée, on dit que la conique est dégénérée. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est propre.

Définition 37: On note b la forme polaire de q .

(x_0, y_0) est un centre de la conique si $2b(x_0, y_0, 0) = -f$.

Une conique est dite à centre si elle admet un unique centre.

Proposition 38: Une conique est à centre si et seulement si q est non dégénérée.

Le centre est alors un centre de symétrie de la conique.

2) Classification affine des coniques

Théorème 40: Une conique propre non vide du plan affine réel s'écrit dans une repère adéquat sous l'une des formes suivantes :

- $y^2 = x$ (parabole)
- $x^2 + y^2 = 1$ (ellipse)
- $x^2 - y^2 = 1$ (hyperbole)

Application 41: Il existe une unique ellipse d'aire minimale circonscrite à un triangle.

3) Autres descriptions des coniques

Proposition 42: Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan affine euclidien, F un point n'appartenant pas à cette droite et $e > 0$.

L'ensemble $\mathcal{C} = \{P \mid PF = e d(P, \mathcal{D})\}$ est une conique, et plus précisément :

- une parabole si $e = 1$
- une ellipse si $e < 1$
- une hyperbole si $e > 1$

$\mathcal{D}$, F et e sont appelés directrice, foyer et excentricité de la conique.

Remarque 43: Un cercle ne peut être décrit de la façon précédente.

Lemme 44: Soit Δ un cône de sommet S et un plan Π ne contenant pas S . Si Π n'est pas (nég.) est) faiblement parallèle à une et une seule génératrice de Δ , il existe exactement deux (resp. une) sphères tangentes au cône Δ et au plan Π .

Théorème 45: (Dandelin) L'intersection d'un cône de révolution Δ et d'un plan Π ne passant pas par le sommet du cône est une conique. De plus, ses foyers sont les points de contact des sphères inscrites dans le cône et tangentes à Π avec Π . La directrice associée à l'un de ces foyers est l'intersection de Π et du plan contenant le cercle de contact de la sphère et du cône.

Proposition 46: Une conique définie par foyer, directrice et excentricité admet une équation polaire $\rho = \frac{r}{1 + e \cos \theta}$.

Application 47: Lois de Kepler :

- Les orbites des planètes sont des ellipses dont le Soleil occupe l'un des foyers.
- Le vecteur joignant le centre du Soleil au centre d'une planète balaye des aires égales en des temps égaux.
- Le carré de la période de révolution d'une planète est proportionnel au cube du grand axe de son orbite.

Proposition 48: Soient F et F' deux points distincts et $a > 0$.

- Si $2a > FF'$, $\{M \mid MF + MF' = 2a\}$ est une ellipse.
- Si $2a < FF'$, $\{M \mid MF - MF' = 2a\}$ est une hyperbole.

Remarque 49: Réciproquement, toutes les ellipses et hyperboles peuvent s'écrire sous cette forme.

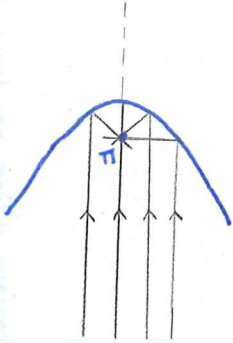
Cela permet par exemple de tracer une ellipse avec deux clous, de la ficelle et un crayon.

Proposition 50: La tangente à la parabole de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$ en un point M coincide avec la médiatrice de $[FM]$, où H est la projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

Application 51: Concentration des rayons solaires dans un four solaire.

Conique	Ellipse	Point	Hyperbole	Deux droites sécantes	Parabole	Droites parallèles (ou droite double)
Statut	propre	dégénérée	propre	dégénérée	propre	dégénérée
Signature de q	$(2,0)$ ou $(0,2)$	$(2,0)$ ou $(0,2)$	$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,0)$ ou $(0,1)$	$(1,0)$ ou $(0,1)$

Four solaire:



Théorème
de Dandelin:

