

161 : Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : distances, isométries.

fefe

2025-2026

Table des matières

1	Distance dans un espace euclidien	1
1.1	Définitions	1
1.2	Orthogonalité	2
1.3	Utilisation du déterminant	2
2	Isométries	2
2.1	Groupe orthogonal	2
2.2	Isométries affines	3
2.3	Générateurs et classification	4
2.4	Isométrie conservant une partie	4
3	Notion d'angle	4
3.1	Définition	4
3.2	Mesure d'un angle	5
3.3	Similitudes	5
4	Développements	5

Notation 1. $(E, \langle, \rangle)$ désigne un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\|\cdot\|$ la norme issue de $\langle, \rangle$.

$\mathcal{E}$ désigne un espace affine de direction E . On dit que $\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien. On note $\text{GA}(\mathcal{E})$ le groupe affine de $\mathcal{E}$. E peut toujours être considéré comme un espace affine euclidien de direction E .

Pour $A, B \in \mathcal{E}$, on note $\vec{AB}$ l'élément de E tel que $A + \vec{AB} = B$. Pour $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ affine, on note $\vec{f} \in \mathcal{L}(E)$ sa partie linéaire.

Si $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, on note $\vec{\mathcal{F}} \subseteq E$ sa direction.

1 Distance dans un espace euclidien

1.1 Définitions

[5] : Tauvel

Définition 2 (Distance sur $\mathcal{E}$). Pour $A, B \in \mathcal{E}$, on pose $d(A, B) := \|\vec{AB}\|$, noté aussi AB .

Proposition 3. La fonction d définit une distance sur $\mathcal{E}$. De plus, d est invariante par translation, i.e. $\forall A, B \in \mathcal{E}, \forall \vec{u} \in E, d(A + \vec{u}, B + \vec{u}) = d(A, B)$.

Remarque 4. Toute application affine f est $\|\vec{f}\|$ -lipschitzienne.

Définition 5 (Distance à une partie). Si $M \in \mathcal{E}$, et $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{E}$ sont non vides, on pose $d(M, \mathcal{A}) := \inf\{d(M, N) \mid N \in \mathcal{A}\}$ et $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \inf\{d(P, Q) \mid P \in \mathcal{A}, Q \in \mathcal{B}\}$.

Proposition 6. — $d(\cdot, \mathcal{A})$ est 1-lipschitzienne

— $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \inf\{d(N, \mathcal{A}) \mid N \in \mathcal{B}\} = \inf\{d(M, \mathcal{B}) \mid M \in \mathcal{A}\}$

1.2 Orthogonalité

[2] : Fresnel

Définition 7 (Orthogonal). *On dit que $x, y \in E$ sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$.*

Si F est un sous-espace vectoriel de E , on note $F^\perp := \{x \in E \mid \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0\}$ son orthogonal. C'est un sous-espace vectoriel de E qui vérifie $E = F \oplus F^\perp$.

Théorème 8 (Pythagore). *Soit $A, B, C \in \mathcal{E}$. Alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ssi $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont orthogonaux.*

Définition 9 (Projection orthogonale). *Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. On appelle projection orthogonale sur $\mathcal{F}$ la projection p sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $\vec{\mathcal{F}}^\perp$. On la note $p_{\mathcal{F}}$.*

Proposition 10. *Soit $A \in \mathcal{E}$ et $B := p_{\mathcal{F}}(A)$. Alors $d(A, \mathcal{F}) = AB$.*

1.3 Utilisation du déterminant

[3] : Rombaldi

Définition 11 (Matrice et déterminant de Gram). *On appelle matrice de Gram de la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in E^n$ la matrice $G(x_1, \dots, x_n) := (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$. Son déterminant, noté $g(x_1, \dots, x_n)$ est appelé déterminant de Gram de $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$.*

Exemple 12. *Si $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base orthonormée de E , alors $G(e_1, \dots, e_n) = I_n$ et $g(e_1, \dots, e_n) = 1$.*

Proposition 13. *Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in E^n$. Alors $g(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ et il y a égalité ssi $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est liée.*

Théorème 14 (Déterminant de Gram). *Soit F un sous-espace vectoriel de E et $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base de F . Alors*

$$\forall x \in E, d(x, F)^2 = \frac{g(e_1, \dots, e_p, x)}{g(e_1, \dots, e_p)}$$

Corollaire 15 (Inégalité de Hadamard). *Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in E^n$. Alors $|\det(x_1, \dots, x_n)| \leq \|x_1\| \dots \|x_n\|$, et il y a égalité ssi $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est orthogonale ou si l'un des vecteurs est nul.*

Définition 16. *Soit $(d_{i,j})_{0 \leq i \neq j \leq n} \in (\mathbb{R}_+^*)^{n(n+1)}$ tel que $\forall i \neq j, d_{i,j} = d_{j,i}$. Le déterminant de Cayley-*

Menger associé est $\Gamma((d_{i,j})_{0 \leq i \neq j \leq n}) := \det$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & 0 & d_{0,1}^2 & d_{0,2}^2 & \cdot & d_{0,n}^2 \\ \cdot & d_{1,0}^2 & 0 & d_{1,2}^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & d_{n-1,n}^2 \\ 1 & d_{n,0}^2 & d_{n,1}^2 & \cdot & d_{n,n-1}^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 17. *Soit $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$, on note pour $0 \leq i \neq j \leq n$, $d_{i,j} = \|x_i - x_j\|$. Alors $\det_{\mathcal{B}_C}(x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0)^2 = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \Gamma((d_{i,j})_{0 \leq i \neq j \leq n})$. En particulier, $(x_0, x_0 \vec{x}_1, \dots, x_0 \vec{x}_n)$ forme un repère affine ssi $\Gamma((d_{i,j})_{0 \leq i \neq j \leq n}) \neq 0$.*

Théorème 18 (DEV : Construire un simplexe). *Soit $(d_{i,j})_{0 \leq i \neq j \leq n} \in (\mathbb{R}_+^*)^{n(n+1)}$ tel que $\forall i \neq j, d_{i,j} = d_{j,i}$. Alors s'équivalent :*

- *il existe $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ tels que $(x_0, x_0 \vec{x}_1, \dots, x_0 \vec{x}_n)$ forme un repère affine, avec $\forall 0 \leq i \neq j \leq n, d_{i,j} = \|x_i - x_j\|$*
- *pour tout $h \in \{2, \dots, n\}$, pour toute sous-famille $\{i_1, \dots, i_h\} \subset \{0, \dots, n\}$, $\Gamma((d_{i_k, i_l})_{1 \leq k \neq l \leq h})$ et $(-1)^{h+1}$ sont strictement de même signe*

2 Isométries

2.1 Groupe orthogonal

[3] : Rombaldi

Définition 19 (Isométrie vectorielle). *On dit que $u : E \rightarrow E$ est une isométrie vectorielle si $u(0) = 0$ et $\forall x, y \in E, \|u(x) - u(y)\| = \|x - y\|$. On note $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles.*

Théorème 20. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- u est une isométrie
- $\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$
- u est linéaire et $\forall x \in E, \|u(x)\| = 0$
- u est linéaire et envoie une BON de E sur une BON de E .

Corollaire 21. $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$. On l'appelle groupe orthogonal de E .

Définition 22. On dit qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si ${}^tAA = I_n$. On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales.

Proposition 23. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $u \in O(E)$ ssi $\exists \mathcal{B}$ BON, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$ ssi $\forall \mathcal{B}$ BON, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$.

Exemple 24. Les matrices de permutation sont orthogonales.

Corollaire 25. $\forall u \in O(E), \det(u) = \pm 1$.

Définition 26. On note $SO(E) := \{u \in O(E) \mid \det(u) = 1\}$ appelé groupe orthogonal spécial de E . C'est un sous-groupe distingué de $O(E)$ d'indice 2.

Proposition 27 (Cas $n = 2$).

$$R : \bar{\theta} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$$

est un isomorphisme de groupes. En particulier, $SO(E)$ est abélien.

De plus, si $s \in O(E) \setminus SO(E)$, alors il existe une BON $\mathcal{B}$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = S := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Théorème 28 (Réduction des isométries vectorielles). Soit $u \in O(E)$. Alors il existe une BON $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & . & . & . \\ . & 0 & R(\theta_1) & 0 & . & . \\ . & . & 0 & R(\theta_2) & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 & R(\theta_r) \end{pmatrix}$$

avec $p + q + 2r = n$, $\theta_1, \dots, \theta_r \in]0, \pi[$.

2.2 Isométries affines

[5] : Tauvel

Définition 29 (Isométries). On dit que $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ est une isométrie si $\forall A, B \in \mathcal{E}, d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$. On note $\text{Is}(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries.

Exemple 30 (Symétrie orthogonale). Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. On appelle symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{F}$ la symétrie par rapport à $\mathcal{F}$ parallèlement à $\bar{\mathcal{F}}^\perp$. On la note $s_{\mathcal{F}}$. Une symétrie orthogonale est une isométrie.

Théorème 31 (Une isométrie est automatiquement affine). Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$. Alors f est une isométrie ssi f est affine et $\vec{f} \in O(E)$.

Corollaire 32. $\text{Is}(\mathcal{E})$ est un sous-groupe de $\text{GA}(\mathcal{E})$. Il admet un sous-groupe d'indice 2, qui est $\text{Is}^+(\mathcal{E}) := \{f \in \text{Is}(\mathcal{E}) \mid \det(\vec{f}) = 1\}$ appelé groupe des déplacements de $\mathcal{E}$.

Exemple 33. Une translation est un déplacement. Une symétrie orthogonale est un déplacement ssi $\text{codim}(\mathcal{F})$ est pair.

2.3 Générateurs et classification

[2] : Fresnel

Définition 34. On dit que $s_{\mathcal{F}}$ est

- une réflexion si $\text{codim}(\mathcal{F}) = n - 1$
- un retournement si $\text{codim}(\mathcal{F}) = n - 2$.

Théorème 35 (Cartan-Dieudonné vectoriel). Soit $u \in \text{O}(E)$. Notons $r = \text{rg}(u - \text{id}_E)$. Alors :

- u est produit de r réflexions (vectorielles), et ce nombre est minimal
- si $n \geq 3$ et $u \in \text{SO}(E)$, alors u est produit de p retournements (vectoriels) avec $p \leq r$.

Exemple 36. Si u est un retournement, alors $r = 2$ et u est produit d'un retournement.

Lemme 37 (Lemme fondamental de classification). Soit f une application affine sur $\mathcal{E}$ telle que $E = \ker(\vec{f} - \text{id}_E) \oplus \text{im}(\vec{f} - \text{id}_E)$. Alors il existe un unique $v \in E$ et une unique application affine g sur $\mathcal{E}$ telle que $f = \tau_v g = g \tau_v$ et g a (au moins) un point fixe.

Corollaire 38 (Cartan-Dieudonné affine). Soit $f \in \text{Is}(\mathcal{E})$ et $r = \text{rg}(\vec{f} - \text{id}_E)$. Alors :

- f est produit de p réflexions (affines) avec $p = r$ si f a un point fixe, et $p = r + 2$ sinon, et ce nombre est minimal dans les deux cas
- si $n \geq 3$ et $f \in \text{Is}^+(\mathcal{E})$, alors f est produit de p retournements (affines) avec $p \leq r$.

Exemple 39. Une translation est produit de 2 retournements.

Remarque 40. Le lemme fondamental de classification permet aussi de classifier les isométries affines en dimension 2 et 3 (cf annexe).

2.4 Isométrie conservant une partie

[3] : Rombaldi

Définition 41. Soit $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{E}$. On note $\text{Is}(\mathcal{P})$ (resp. $\text{Is}^+(\mathcal{P})$) l'ensemble des isométries (resp. déplacements) de $\mathcal{E}$ qui conservent $\mathcal{P}$.

Proposition 42. — $\text{Is}(\mathcal{P})$ est un sous-groupe de $\text{Is}(\mathcal{E})$ et $\text{Is}^+(\mathcal{E})$ est un sous-groupe distingué de $\text{Is}(\mathcal{P})$

- $\Phi : f \in \text{Is}(\mathcal{P}) \mapsto f|_{\mathcal{P}} \in \mathfrak{S}(\mathcal{P})$ est un morphisme de groupe
- s'il existe $\sigma \in \text{Is}(\mathcal{P}) \setminus \text{Is}^+(\mathcal{P})$, alors $\rho \in \text{Is}^+(\mathcal{P}) \mapsto \sigma \circ \rho \in \text{Is}(\mathcal{P}) \setminus \text{Is}^+(\mathcal{P})$ est bijective.

Exemple 43 (Groupe diédral). Dans un plan affine euclidien, on note Γ_n un n -gône régulier. Alors $\text{Is}(\Gamma_n)$ est isomorphe à $\langle R(2\pi/n), S \rangle$. On l'appelle groupe diédral, noté D_{2n} , il est de cardinal $2n$.

Exemple 44 (Isométries du tétraèdre). Dans un espace affine euclidien, on note $\mathcal{T}$ un tétraèdre régulier. Alors $\text{Is}(\mathcal{T})$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$ et $\text{Is}^+(\mathcal{T})$ est isomorphe à $\mathfrak{A}_4$

3 Notion d'angle

Dans cette partie, $n = 2$. On note $\mathbb{S}^1 := \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$.

3.1 Définition

[1] : Audin

Lemme 45. Soit $x, y \in \mathbb{S}^1$, alors il existe un unique $u \in \text{SO}(E)$ tel que $u(x) = y$.

Définition 46 (Angle orienté de vecteurs/demi-droites). On définit la relation d'équivalence $\mathcal{R}_1$ sur $(\mathbb{S}^1)^2$ par $(x, y)\mathcal{R}_1(x', y')$ ssi $\exists u \in \text{SO}(E), u(x) = x'$ et $u(y) = y'$. La classe d'équivalence de (x, y) , notée $\widehat{(x, y)}$ (ou $(\mathbb{R}_+x, \mathbb{R}_+y)$), est appelée angle orienté des vecteurs x et y (ou des demi-droites $\mathbb{R}_+x$ et $\mathbb{R}_+y$).

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des angles orientés de vecteurs, i.e. l'ensemble des classes d'équivalences de $\mathcal{R}_1$.

Proposition 47. $\Phi : \widehat{(x, y)} \in \mathcal{A} \mapsto u \in \text{SO}(E)$ telle que $u(x) = y$, est bien définie et bijective.

Corollaire 48. Φ induit une structure de groupe abélien sur $\mathcal{A}$. En particulier, on a la relation de Chasles : $\forall x, y, z \in \mathbb{S}^1, \widehat{(x, y)} + \widehat{(y, z)} = \widehat{(x, z)}$.

Exemple 49. L'angle nul $\widehat{(x, x)}$ correspond à Id , l'angle plat $\widehat{(x, -x)}$ correspond à $-\text{Id}$. Un angle $\widehat{(x, y)}$ tel que $2\widehat{(x, y)} = \widehat{(x, -x)}$ est appelé angle droit.

Proposition 50. Soit ABC un vrai triangle. La somme de ses angles, i.e.

$$\widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} + \widehat{(\vec{BC}, \vec{BA})} + \widehat{(\vec{CA}, \vec{CB})}$$

est un angle plat.

3.2 Mesure d'un angle

Définition 51. Une orientation du plan est le choix d'une classe d'équivalence de l'ensemble des BON sous l'action de $\text{SO}(E)$. On appelle BOND une base dans cette classe.

Lemme 52. La matrice de $u \in \text{SO}(E)$ ne dépend pas de la BOND.

Proposition 53. $\mathcal{A} \xrightarrow{\Phi} \text{SO}(E) \rightarrow \text{SO}_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{R^{-1}} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est une composée d'isomorphismes de groupes. On appelle mesure de l'angle $\widehat{(x, y)}$ l'élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ associé.

Exemple 54. Un angle nul est de mesure 0, un angle plat de mesure π et un angle droite est de mesure $\pm\pi/2$.

Proposition 55 (Théorème de Al-Kashi). Soit ABC un vrai triangle de E . Alors $AB^2 + AC^2 - 2AB.AC \cos(\widehat{(\vec{CA}, \vec{CB})}) = BC^2$.

Théorème 56 (DEV : Point de Fermat d'un triangle). Soit ABC un vrai triangle de E dont les 3 angles sont strictement inférieurs à $2\pi/3$. Alors $f : M \in \mathbb{R}^2 \mapsto MA + MB + MC \in \mathbb{R}$ admet un minimum global strict en $P \in \text{Conv}(A, B, C) \setminus \{A, B, C\}$, qu'on appelle point de Fermat.

Enfin, si on construit vers l'extérieur de ABC des triangles équilatéraux ABC' , BCA' et ACB' , alors (AA') , (BB') et (CC') sont concourrantes en P , et $f(P) = AA' = BB' = CC'$.

3.3 Similitudes

[1] : Audin

Définition 57 (Similitude vectorielle). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est une similitude vectorielle si $\exists k > 0, \forall x \in E, \|u(x)\| = k\|x\|$. On note $\text{Sim}(E)$ leur ensemble.

Définition 58 (Similitude affine). On dit que $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ est une similitude si $\exists k > 0, \forall M, N \in \mathcal{E}, d(f(M), f(N)) = kMN$. On note $\text{Sim}(\mathcal{E})$ leur ensemble.

Exemple 59. Les isométries et les homothéties sont des similitudes.

Proposition 60. f est une similitude ssi f est affine et $\vec{f}$ est une similitude vectorielle.

Corollaire 61. $\text{Sim}(E)$ (resp. $\text{Sim}(\mathcal{E})$) est un sous-groupe de $\text{GL}(E)$ (resp. $\text{GA}(\mathcal{E})$).

Proposition 62. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u préserve les angles (non orientés de demi-droites), i.e. $\forall x, y \in \mathbb{S}^1, \widehat{(u(x), u(y))} = \pm \widehat{(x, y)}$ ssi $u \in \text{Sim}(E)$.

Corollaire 63 (Liouville). Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ de classe C^1 et bijective, telle que $\forall x \in E, df_x$ préserve les angles. Alors $f \in \text{Sim}(\mathcal{E})$.

4 Développements

- Point de Fermat d'un triangle, [4]
- Déterminant de Cayley-Menger, [6]

Références

- [1] Michèle Audin. *Géométrie*. EDP sciences, 2006.
- [2] Jean Fresnel. *Méthodes modernes en géométrie*. hermann, 2010.
- [3] Jean-Etienne Rombaldi. *Mathématiques pour l'agrégation, Algèbre et géométrie*. deboeck supérieur, 2021.
- [4] François Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*. Cassini, 2014.
- [5] Patrice Tauvel. *Géométrie*. Dunod, 2005.
- [6] Maxime Zavidovique. *Un max de maths*. Calvage and Mounet, 2013.