Références :
Petit guide du calcul différentiel, François Rouvière

Lemme. $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. On a

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(M) \neq 0\}.$$

Ainsi, $GL_n(\mathbb{R})$ est bien ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit maintenant $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres complexes $\lambda_1, ..., \lambda_n$. On peut choisir une suite (ε_k) convergeant vers 0 dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\det(Y - \varepsilon_k I_n) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - \varepsilon_k) \neq 0$$

Ainsi, les matrices $X_k = Y - \varepsilon_k I_n$ sont alors inversibles et convergent vers Y. On obtient donc le résultat. □

Théo. *Soit la fonction*

$$\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

On a donc pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$D_X \det .H = Tr({}^t Com(X).H).$$

Démonstration.

- Calcul de $D_{I_n} \det$.
  Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ses valeurs propres complexes. Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \det(I_n + tM) &= \prod_{i=1}^{n} (1 + t\lambda_i) \\ &= 1 + t\mathrm{Tr}(M) + O(t^2) \\ &= 1 + t\mathrm{Tr}(M) + o(t) \end{aligned}$$

  Ainsi, $D_{I_n} \det(M) = \mathrm{Tr}(M)$.

- Calcul de $D_X \det$ pour $X \in GL_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \det(X + H) &= \det(X(I_n + X^{-1}H)) \\ &= \det(X)(1 + \mathrm{Tr}(X^{-1}H) + o(||H||)) \\ &= \det(X) + \mathrm{Tr}(\det(X)X^{-1}H) + o(||H||) \\ &= \det(X) + \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(X)H) + o(||H||) \end{aligned}$$

  Ainsi, $D_X \det(H) = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(X)H)$.

- Calcul de $D_X \det$ pour $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque.
  L'application $X \mapsto^t \mathrm{Com}X$ est continue donc $f : X \mapsto \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}X.)$ est continue et $g : X \mapsto D_X \det .$ est continue. On a donc que f et g coïncident sur $GL_n(\mathbb{R})$ qui est dense sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a donc $f = g$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

□

App. Soit $y_1, ..., y_n$ des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ du système différentiel $y'(t) = A(t)y(t)$, où $A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une fonction continue et soit $w(t) = \det(y_1(t), ..., y_n(t))$ leur déterminant wronskien.
Alors $w'(t) = \mathrm{Tr}(A(t))w(t)$. De plus, si A est constante, $\det(e^{tA}) = e^{t\mathrm{Tr}(A)}$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} w'(t) &= (t \mapsto \det(Y(t)))' \\ &= D_{Y(t)} \det(Y'(t)) \\ &= \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(Y(t)).Y'(t)) \\ &= \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(Y(t)).A(t)Y(t)) \\ &= \mathrm{Tr}(A(t) \underbrace{Y(t){}^t\mathrm{Com}(Y(t))}_{\det(Y(t))}) \\ &= \mathrm{Tr}(A(t)) \det(Y(t)) \end{aligned}$$

On obtient donc $w'(t) = \mathrm{Tr}(A(t))w(t)$ et, par conséquent,

$$w(t) = w(0) \exp\left(\int_0^t \mathrm{Tr}(A(s))ds\right).$$

Si, de plus, A est constant, alors, revenant au système initial, on a

$$Y'(t) = AY(t) \text{ ce qui implique } Y(t) = Y(0)e^{tA}.$$

On applique le déterminant à cette égalité et on obtient

$$w(t) = w(0)\det(e^{tA}).$$

Utilisons maintenant le résultat dans le cas où A n'est pas constant, on obtient alors

$$w(t) = w(0)\exp(t\mathrm{Tr}(A)).$$

Ainsi, on obtient le résultat. $\square$

Leçons possibles : 152 - 215