

(+ Irrationnalité de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$) de gons 125, 127, 148, (141)

[Cognet] II.1.1

1) Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}^*$ 2 à 2 premiers entre eux sans facteurs carrés.

Alors:

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n}) : \mathbb{Q}] = 2^n$$

2) $\forall m \geq 2, \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \notin \mathbb{Q}$.

preuve:

On prouve le résultat par récurrence.

• $n=1$: Supposons $\sqrt{a_1} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. On a alors $q^2 a_1 = p^2$ donc $p \mid q a_1$.

Or $p \nmid q$ car p, q sont premiers entre eux. Donc $p \mid a_1$, absurde car a_1 sans facteurs carrés.

Donc: $\sqrt{a_1} \notin \mathbb{Q}$, or $[\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}) : \mathbb{Q}] = 2$.

• supposons le résultat acquis pour un certain $n \geq 1$:

On commence par montrer que $\sqrt{a_{n+1}} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n})$.

Notons $K_n := \mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n})$, on a: $\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n}, \sqrt{a_{n+1}}) = K_{n+1}(\sqrt{a_{n+1}})$.

Et, par hypothèse de récurrence (car $a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$ sont bien 2 à 2 premiers entre eux et sans facteurs carrés) + lemme de la base télescopique:

$$[K_{n+1}(\sqrt{a_{n+1}}) : K_n] = 2.$$

$$\Rightarrow K_{n+1}(\sqrt{a_{n+1}}) = K_n \oplus \sqrt{a_{n+1}} K_n \quad (*)$$

Supposons $\sqrt{a_{n+1}} \in K_n(\sqrt{a_{n+1}})$; $\exists \lambda, \mu \in K_n$ tq $\sqrt{a_{n+1}} = \lambda + \mu \sqrt{a_{n+1}}$.

On a alors: $\lambda = (1 - \mu \sqrt{a_{n+1}}) \sqrt{a_{n+1}}$ donc $\lambda^2 = a_{n+1} (1 - \mu \sqrt{a_{n+1}})^2 = a_{n+1} (1 + \mu^2 a_{n+1} - 2\mu \sqrt{a_{n+1}})$.

Or, $a_{n+1} (1 + \mu^2 a_{n+1}) \in K_n$ et $2\mu a_{n+1} \sqrt{a_{n+1}} \in K_n$ donc, par (*): $2\mu a_{n+1} = 0 \Rightarrow \mu = 0$.

On a donc $\sqrt{a_{n+1}} = \lambda \in K_n$, ce qui contredit l'hypothèse de récurrence appliquée à $(a_1, \dots, a_n; \sqrt{a_{n+1}})$.

$$\Rightarrow \sqrt{a_{n+1}} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n}, \sqrt{a_{n+1}}) \quad (1)$$

Supposons $\sqrt{a_{n+1}} \in K_n = K_{n-1}(\sqrt{a_n})$. On a alors $\sqrt{a_{n+1}} = \lambda + \mu \sqrt{a_n}$ avec $\lambda, \mu \in K_{n-1}$.

$$\text{Donc: } \sqrt{a_{n+1}} = \sqrt{a_n} (\lambda + \mu \sqrt{a_n}) = \lambda \sqrt{a_n} + \mu a_n$$

On a $\lambda \neq 0$ car $\sqrt{a_{n+1}} \notin K_{n-1}$ comme on l'a déjà vu (H.R. pour $(a_1, \dots, a_n; \sqrt{a_{n+1}})$).

$$\text{Donc: } \sqrt{a_n} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{a_{n+1}} - \frac{\mu}{\lambda} a_n \in K_{n-1}(\sqrt{a_{n+1}})$$

Donc: $K_n \subseteq K_{n-1}(\sqrt{a_{n+1}})$ et donc $\sqrt{a_{n+1}} \in \mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n}, \sqrt{a_{n+1}})$: contredit (1).

$$\Rightarrow \sqrt{a_{n+1}} \notin K_n$$

Soit. 2. Or, $\sqrt{a_{n+1}}^2 = a_{n+1} \in K_n$ donc $[K_{n+1}:K_n] = 2 \leadsto K_n$ est base télescopique: $[K_n:\mathbb{Q}] = 2^{n-1}$.

Avant de passer à la question 2), on montre un lemme conséquence de la question 1). $\forall I \subseteq \llbracket 1:n \rrbracket$, on note $\alpha_I := \prod_{i \in I} \alpha_i$. (avec la convention $\alpha_\emptyset = 1$)

lemme:

$\beta(\sqrt{\alpha_I}, I \subseteq \llbracket 1:n \rrbracket)$ est une $\mathbb{Q}$ -base de K_n .

preuve du lemme:

On a $|\beta| = |\beta(\llbracket 1:n \rrbracket)| = 2^n = [K_n:\mathbb{Q}]$ par 1), donc il suffit de mg β est une famille génératrice de K_n .

• Soit $I \subseteq \llbracket 1:n \rrbracket$: $\sqrt{\alpha_I} = \prod_{i \in I} \alpha_i \in K_n \leadsto \text{vect}_{\mathbb{Q}}(\sqrt{\alpha_I}, I \subseteq \llbracket 1:n \rrbracket) \subseteq K_n$

• Soient $I, J \subseteq \llbracket 1:n \rrbracket$: $\sqrt{\alpha_I \alpha_J} = \underbrace{\left(\prod_{i \in I \cap J} \alpha_i \right)}_{\in \mathbb{Q}} \sqrt{\alpha_{I \setminus J} \alpha_{J \setminus I}} \in K_n$ où $I \setminus J := (I \cup J) \setminus (I \cap J)$

Donc: $\text{vect}_{\mathbb{Q}}(\sqrt{\alpha_I}, I \subseteq \llbracket 1:n \rrbracket)$ est une $\mathbb{Q}$ -algèbre, elle contient les $\sqrt{\alpha_I} = \sqrt{\alpha_{I \setminus \emptyset}}$ donc $K_n \subseteq \text{vect}_{\mathbb{Q}}(\sqrt{\alpha_I}, I \subseteq \llbracket 1:n \rrbracket)$ par def de K_n et on a donc égalité $\leadsto \beta$ est bien $\mathbb{Q}$ -génératrice dans K_n . $\square$

2) Notons $p_1, \dots, p_n$ les entiers premiers distincts $\leq m$.

Soit $k \in \llbracket 1:m \rrbracket$, notons $\forall i \in \llbracket 1:n \rrbracket$: $\alpha_i := v_{p_i}(k)$ de sorte que $k = \prod_{i=1}^n p_i^{\alpha_i}$.

Notons $I_k := \{i \in \llbracket 1:n \rrbracket; 2 \nmid \alpha_i\}$ et $J_k := \{i \in \llbracket 1:n \rrbracket; 2 \mid \alpha_i \text{ et } \alpha_i \geq 1\}$

On a: $\sqrt{k} = \underbrace{\left(\prod_{i \in J_k} p_i^{\frac{\alpha_i}{2}} \right)}_{=: h_k \in \mathbb{N}^*} \times \underbrace{\left(\prod_{i \in I_k} p_i^{\frac{\alpha_i-1}{2}} \right)}_{=1} \times \underbrace{\prod_{i \in I_k} \sqrt{p_i}}_{=: \sqrt{\alpha_I}}$ où α_i est def pour la p_i comme pour la α_i dans la quel = 1.

Pour $I \subseteq \llbracket 1:n \rrbracket$, notons $K_I := \{k \in \llbracket 1:m \rrbracket; I_k = I\}$.

On a alors: $\sum_{k=1}^m \sqrt{k} = \sum_{I \subseteq \llbracket 1:n \rrbracket} \left(\sum_{k \in K_I} h_k \right) \sqrt{\alpha_I}$

Donc, si $\sum_{k=1}^m \sqrt{k}$, on a par le lemme: $\forall I \subseteq \llbracket 1:n \rrbracket$: $\sum_{k \in K_I} h_k = 0$

Or les h_k sont des entiers positifs, donc: $\forall k \in \llbracket 1:m \rrbracket$: $h_k = 0$

donc: $\forall k \in \llbracket 1:m \rrbracket$: $k = h_k \sqrt{\alpha_{I_k}} = 0$ ∇