

(* Théorème de Vitali :) de nos 234, 262, 235 (201, 241)

[Barbe - didoux]
I.3

des v.a. considérées sont déf. sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ fini.

Soient $(X_n) \in (L^1)^{\mathbb{N}}$ et $X \in L^1$, alors :

$$X_n \xrightarrow{P} X \text{ et } (X_n) \text{ équr-} \int \Leftrightarrow X \in L^1 \text{ et } X_n \xrightarrow{L^1} X$$

démonstre 1 :

$$(X_i)_{i \in \mathbb{I}} \text{ équr-} \int \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall A, P(A) \leq \eta, \forall i \in \mathbb{I}: E[|X_i| 1_A] < \varepsilon. \\ \sup_{i \in \mathbb{I}} E[|X_i|] < +\infty \end{cases}$$

démonstre 2 :

• $Y \in L^1 \Rightarrow (Y)$ équr- $\int$

• une un^o fme de familles équr- $\int$ l'est encore.

preuve:

• démontre 1.

⊙ Soit $\varepsilon > 0$:

$$\exists c > 0 \text{ tq } \forall i \in I: \mathbb{E}[|X_i| \mathbb{1}_{|X_i| \leq c}] \leq \varepsilon.$$

Soit $A \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \forall i \in I: \mathbb{E}[|X_i| \mathbb{1}_A] &= \mathbb{E}[|X_i| \mathbb{1}_{|X_i| \leq c} \mathbb{1}_A] + \mathbb{E}[|X_i| \mathbb{1}_{|X_i| > c} \mathbb{1}_A] \\ &\leq \mathbb{E}[|X_i| \mathbb{1}_{|X_i| \leq c}] + c P(A) \\ &\leq \varepsilon + c P(A) \leq 2\varepsilon \quad \text{si} \quad P(A) \leq \frac{\varepsilon}{c}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \odot P(|X_i| > c) &\leq \frac{\mathbb{E}[|X_i|]}{c} \quad \text{par Markov} \\ &\leq \frac{\sup \mathbb{E}[|X_i|]}{c} \xrightarrow{c \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{indép. de } i. \end{aligned}$$

• démontre 2.

• $X \in L^1$ donc $|X| < +\infty$ p.s.

$$\text{Ainsi: } P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{|X| \leq n\}) = 1.$$

$$\text{Donc: } |X| \mathbb{1}_{|X| > c} \xrightarrow{c \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{p.s.}$$

$$\text{donc (TCD): } \mathbb{E}[|X| \mathbb{1}_{|X| > c}] \xrightarrow{c \rightarrow +\infty} 0$$

• d.l.

• preuve du théorème:

$$\odot X_n \xrightarrow{P} X \text{ donc: } \forall \varepsilon > 0, P(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{Soit } \varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ extracte tq } \forall n: P(|X_{\varphi(n)} - X| > \frac{1}{n}) \leq 2^{-n}.$$

$$\text{On a alors: } \sum_{n \in \mathbb{N}} P(|X_{\varphi(n)} - X| > \frac{1}{n}) < +\infty.$$

$$\text{Donc, par BCL: p.s., APCR: } |X_{\varphi(n)} - X| \leq \frac{1}{n}.$$

$$\text{Donc: } X_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} X \text{ p.s.}$$

Ainsi, par Fatou:

$$\mathbb{E}[|X|] = \mathbb{E}\left[\liminf_{n \rightarrow +\infty} |X_{\varphi(n)}|\right] \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[|X_{\varphi(n)}|] \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[|X_n|] < +\infty.$$

$$\text{no } X \in L^1. \quad (\text{En particulier, } (X, X_n, n \in \mathbb{N}) \text{ est équi-} \int)$$

Soit $\varepsilon > 0$:

$$\text{Soit } \text{le } \eta > 0 \text{ d'équi-} \int \text{ de } (X, X_n, n \in \mathbb{N}). \quad \exists N \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \eta$$

On a alors:
$$\mathbb{E}[|X_n - X|] \leq \underbrace{\mathbb{E}[|X_n - X| \mathbb{1}_{|X_n - X| \leq \varepsilon}]}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{\mathbb{E}[|X_n| \mathbb{1}_{|X_n - X| > \varepsilon}]}_{\forall n \geq N}$$

②
$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[|X_n - X|]}{\varepsilon} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Soit $\varepsilon > 0$, soit N tq $n \geq N \Rightarrow \mathbb{E}[|X_n - X|] \leq \varepsilon$.

$(X_0, \dots, X_N, X)$ est équi- $\int$ donc $(\exists \eta > 0)$ tq $\forall p(A) \leq \eta$: $\mathbb{E}[X_0 | \mathcal{A}_0], \dots, \mathbb{E}[X_N | \mathcal{A}_N], \mathbb{E}[X | \mathcal{A}_\infty] \leq \varepsilon$
 $\forall n \geq N$, $\mathbb{E}[|X_n| | \mathcal{A}_n] \leq \mathbb{E}[|X_n - X|] + \mathbb{E}[|X| | \mathcal{A}_n] \leq 2\varepsilon$.

Cor:

Soit $p > 1$.

Si $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[|X_n|^p] < +\infty$ et $X_n \xrightarrow{p} X \in L^p$, alors:
 $\forall q \in [1, p[$, $X_n \xrightarrow{q} X$

preuve:

De la m^{me} manière que dans la preuve précédente:

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s-uite tq $X_n \xrightarrow{p} X$

$\leadsto$ par facon $X \in L^p \subseteq L^q$

par Minkowski: $\|X_n - X\|_p \leq \|X_n\|_p + \|X\|_q$

Donc $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[|X_n - X|^p] < +\infty$.

$\leadsto$ ops. $X = 0$.

$$\mathbb{E}[|X_n|^q | \mathcal{A}_{n-1}] = \mathbb{E}[|X_n|^p | \mathcal{A}_{n-1}]^{q/p}$$

$$\leq \mathbb{E}[|X_n|^p c^{q-p} | \mathcal{A}_{n-1}] \quad \text{car } q-p < 0$$

$$\leq c^{q-p} \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[|X_n|^p] \xrightarrow{c \rightarrow \infty} 0 \quad \text{car } q-p < 0 \quad (\text{indépendant de } n)$$

$(|X_n|^q)_{n \in \mathbb{N}}$ est équi- $\int$. $\leadsto$ théorème de Vitali.