

(+ Densité des polynômes orthogonaux et contre-exemple: degrés 201, 213, 234, 235, 239, 245, 250)

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$, $\rho: I \rightarrow \mathbb{R}^+$ mesurable tq $\exists \alpha > 0$, $\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x) dx < +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}$: $\int_I |x|^n \rho(x) dx < +\infty$.

Alors:

la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$

De plus, l'hypothèse $\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x) dx < +\infty$ est fondamentale: le théorème est faux avec $\rho: x \mapsto x^{-p(x)}$ sur $I =]0, +\infty[$.

Preuve:

pas recommandé pour le rapport de stage (difficile)

• la famille des polynômes orthogonaux $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie comme l'orthogonalité de Gram-Schmidt de $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $L^2(I, \ell)$. On sait déjà que c'est une famille orthogonale, reste à montrer qu'elle est totale. Soit donc $f \in \text{vect}(P_n, n \in \mathbb{N})^\perp = \text{vect}(X^n, n \in \mathbb{N})^\perp$.

On a $f \in L^2(I, \ell)$ et $\forall n \in \mathbb{N}$: $\int_I f(x) x^n \ell(x) dx = 0$, on veut org $f=0$.

On va étudier la fonction de la variable complexe $F: z \mapsto \int_I e^{xz} f(x) \ell(x) dx$, qui nous fait penser à une transformée de Fourier.

* d'q F est bien définie et holomorphe sur un certain ouvert de $\mathbb{C}$.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall x \in I: |e^{xz} f(x) \ell(x)| = e^{\text{Re}(z)x} |f(x)| \ell(x)$$

$$\leq \frac{1}{2} (e^{2\text{Re}(z)x} \ell(x) + |f(x)|^2 \ell(x))$$

$$\leq \frac{1}{2} (e^{2|x| \text{Re}(z)} \ell(x) + |f(x)|^2 \ell(x))$$

Or, $f \in L^2(I, \ell)$ donc $|f|^2 \ell \in L^1(I)$ et $\forall z \in \Omega := \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) < \alpha\}$, on a: $e^{2|x| \text{Re}(z)} \ell(x) \leq e^{2|x| \alpha} \ell(x)$

et $x \mapsto e^{2|x| \alpha} \ell(x) \in L^1(I)$ par hyp. sur ℓ .

De plus: $\forall z \in \Omega: x \mapsto e^{xz} f(x) \ell(x) \in L^1(I)$

• $\forall x \in I: z \mapsto e^{xz} f(x) \ell(x)$ est holomorphe sur Ω de dérivée n -ième $z \mapsto x^n e^{xz} f(x) \ell(x)$.

Par le théorème d'holomorphie sous le signe $\int$, on a:

F holomorphe sur Ω et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \Omega: F^{(n)}(z) = \int_I x^n e^{xz} f(x) \ell(x) dx$

* Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, contenant 0. Or, $\forall n \in \mathbb{N}: F^{(n)}(0) = \int_I x^n f(x) \ell(x) dx = 0$ par hyp.

Donc, par le théorème des zéros isolés: $F=0$ sur Ω .

En particulier, comme $i\mathbb{R} \subseteq \Omega: \forall \xi \in \mathbb{R}: 0 = F(-i\xi) = \int_I e^{-i\xi x} f(x) \ell(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \underbrace{f(x) \ell(x)}_{=: g(x)} dx$

On a déjà vu que $g \in L^1(\mathbb{R})$, et donc, la transformée de Fourier $\hat{g}$ de g vérifie: $\hat{g} \equiv 0$.

Par le théorème de Fejér: $g \equiv 0$, i.e.: $\forall x \in I: f(x) \ell(x) = 0$

donc, comme $\forall x \in I, \ell(x) > 0$, on a: $f \equiv 0$ sur I .

• On suppose maintenant $\ell(x) = e^{-h(x)}$ sur $I =]0, +\infty[$.

On a bien $\ell(x) > 0 \forall x \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}: \int_0^{+\infty} x^n e^{-h(x)} dx < +\infty$ (faiblement impropre en 0 et facile en $+\infty$).

Notons $f: I \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sin(2\pi h(x))$, on a: $\forall x \in I: |f(x)| \leq 1$ donc $f \in L^2(I, e)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$: $\int_0^{+\infty} x^n \sin(2\pi h(x)) x^{-h(x)} dx = \int_{\substack{u=h(x) \\ x=e^u}}^{+\infty} e^{nu} \sin(2\pi u) (e^u)^{-u} e^u du$ grâce au C^1 -diff. $\exp: \mathbb{R} \rightarrow I$.

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp((n+1)u - u^2) \sin(2\pi u) du$$

$$= e^{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(u - \frac{n+1}{2}\right)^2\right) \sin(2\pi u) du$$

$$= e^{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \sin\left(2\pi\left(t + \frac{n+1}{2}\right)\right) dt$$
 grâce au C.V. affine $t = u - \frac{n+1}{2}$

$$= (-1)^{n+1} e^{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \sin(2\pi t) dt$$

$$= 0$$
 car la fonction intégrée est impaire.

Donc: $f \in L^2(I, e) \setminus \text{vect}(P_n, n \in \mathbb{N})$