

* Quelques propriétés des opérateurs compacts. Leçons 203, 206, 208

[Hirsch-Lacombe]
V.1.1 et
[Quellé-Lizy]
V.6

On suppose acquises les notions très élémentaires de théorie spectrale ($\sigma(u)$ et un compact non vide de $\mathbb{C}$ par exemple).

Soit E un espace de Banach et $u \in K(E)$. On note $I := \text{id}_E$ et $v := I - u$. On se place dans un Banach pour simplifier un peu les preuves mais ce n'est pas nécessaire. cf.

Hirsch-Lacombe).

Prop (perturbations compacts de l'identité):

1) $\dim \ker v < +\infty$

2) $\text{Im } v$ fermée dans E

3) $\text{codim}^{\text{im}} v < +\infty$

4) $a(v) = d(v) < +\infty$ (cf. juste après pour la def.)

5) v injectif $\Leftrightarrow v$ surjectif $\Leftrightarrow v$ bijectif $\Leftrightarrow v \in GL(E)^*$.

Th:

1) Si $\dim E = +\infty$, alors:

$0 \in \sigma(u)$

2) $\forall \lambda \in \sigma(u) \setminus \{0\}$: $\lambda \in \sigma_p(u)$ et $\dim(E\lambda) < +\infty$.

3) $\sigma(u)$ est au plus dénombrable. S'il est infini, on peut écrire: $\sigma(u) \setminus \{0\} = \{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$ avec $|\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n|$ et $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On aura besoin des lemmes suivants qui sont vrais avec E un en quelconque et $u \in L(E)$ quelconque.

Lemme 1:

Soit $f \in L(E)$, alors:

1) $\exists p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tq: $\ker(f^0) \subsetneq \dots \subsetneq \ker(f^p) = \ker(f^{p+1}) = \dots$

$\text{Im}(f^0) \supsetneq \text{Im}(f^1) \supsetneq \dots \supsetneq \text{Im}(f^q) = \text{Im}(f^{q+1}) = \dots$

On note $a(f) := p$ l'ascende de f et $d(f) := q$ la descente de f .

2) Si $a(f), d(f) < +\infty$, alors:

$a(f) = d(f)$

Lemme 2:

Soient $A \neq B$ deux sous-fermés de E . Alors:

$$\exists b \in S(B), \quad d(b, A) \geq \frac{1}{2}$$

En particulier, si $v(B) \subseteq A$:

$$\forall a \in A: \|u(a) - u(b)\| \geq \frac{1}{2}$$

preuve du lemme 1:

purement algébrique, cf. Quillen-Zurberg.

preuve du lemme 2:

Soit $x \in B \setminus A$ et $\alpha := d(x, A) > 0$. $\exists y \in A, \|x - y\| \leq 2\alpha$. On pose $b := \frac{x-y}{\|x-y\|} \in S(B)$

$$\text{Soit } a \in A: \|b - a\| = \frac{1}{\|x-y\|} \|x - (y + \|x-y\|a)\| \geq \frac{\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc, si } v(B) \subseteq A: \forall a \in A: \|u(a) - u(b)\| = \|b - v(b) - a + v(a)\| \geq \frac{1}{2}$$

preuve de la prop.

1) Par compacité de u : $u(\overline{B}(u(v)))$ est relativement compacte. Or, $u|_{\ker v} = I$ donc $u(\overline{B}(u(v))) = \overline{B}(u(v))$.
Ainsi, $\overline{B}(u(v))$ est compact et donc, par le théorème de Riesz: $\dim \ker v < +\infty$.

2) Notons $F := E/\ker v$ qui est un espace de Banach pour la norme $\|x\|_F = d(x, \ker v)$ (car $\ker v$ fermé dans E) et la project. canonique $\pi: E \rightarrow F$ est continue.

Notons $w: F \rightarrow E$ l'application linéaire induite par v , qui est continue. On a $\text{Im } v = \text{Im } w$ donc il suffit de mg $\text{Im } w$ est fermée.

Par cela, montrons: $\exists \delta > 0, \forall x \in F: \|w(\tilde{x})\| \geq \delta \|x\|_F$. (*)

Si tel n'est pas le cas, $\exists (\tilde{x}_n) \in S(F)^{\mathbb{N}}$ tq $\|w(\tilde{x}_n)\| = \|v(x_n)\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$\tilde{x}_n \in S(F)$ se traduit par $d(x_n, \ker v) = 1$. Or, $\ker v$ est fermé donc $\exists y_n \in \ker v, \|x_n - y_n\| = d(x_n, \ker v) = 1$.

Notons $z_n = x_n - y_n \in S(E)$. Par compacité de u , quitte à extraire, on a $u(z_n) \rightarrow p \in \overline{S(E)}$.

$$\text{Or: } z_n - u(z_n) = v(z_n) = v(x_n) - v(y_n) = v(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc: $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p$ et en particulier, par continuité de u : $u(z_n) \rightarrow u(p)$. Ainsi, $p = u(p)$, i.e.: $p \in \ker v$.

$$\text{Donc: } 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|z_n - p\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - (y_n + p)\| \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, \ker v) \geq 1 \quad \text{!}$$

Ainsi, (*) est vérifiée. Soit alors $(\tilde{x}_n) \in F^{\mathbb{N}}$ tq $(w(\tilde{x}_n))$ converge dans E .

Def. 8

$(w(\bar{x}_n))$ est donc de Cauchy dans E et donc, par (1), $(\bar{x}_n)$ est de Cauchy dans F .
 F est complet donc $\bar{x}_n \rightarrow \bar{x} \in F$. Par continuité de w : $w(\bar{x}_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} w(\bar{x}) \in \text{Im } w$.
 $\Rightarrow \text{Im } w$ est bien fermé.

3) Supposons $\text{codim Im } w = +\infty$.

On peut donc construire $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (E/\text{Im } w)^{\mathbb{N}}$ tq $\forall n \geq 0$: $a_n \notin \text{Im } w \oplus \text{Ca}_0 \oplus \dots \oplus \text{Ca}_n =: V_n$.

On a $\forall n$: $V_n \subsetneq V_{n+1}$ et $v(V_{n+1}) \subseteq \text{Im } w \subseteq V_n$. On montre de plus facilement par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}$: V_n est fermé.

Par le lemme 2: $\forall n \geq 1$, $\exists b_n \in S(V_n)$, $\forall a \in V_{n-1}$: $\|u(b_n) - u(a)\| \geq \frac{1}{2}$.

En particulier, $\forall n \geq 1$: $\|b_n\| = 1$ et $\forall j \leq n-1$: $\|u(b_n) - u(b_j)\| \geq \frac{1}{2}$. Cette dernière condition empêche la convergence de toute sous-suite de $(u(b_n))_{n \in \mathbb{N}}$, ce qui contredit la compacité de u .

Donc: $\text{codim Im } w < +\infty$.

preuve du th:

1) Si $0 \notin \sigma(u)$, alors $u \in \text{GL}(E)^*$. Or, $K(E)$ est un idéal bilatère de $\text{GL}(E)$ donc:

$I = u \circ u^{-1} \in K(E)$. On a donc $\bar{B}(E)$ compact et donc, par Riesz: $\dim E < +\infty$.

4) Supposons $d(u) = +\infty$, on a: $\ker(v^0) \subsetneq \ker(v^1) \subsetneq \dots \subsetneq \ker(v^n) \subsetneq \dots$ et $v(\ker(v^{n+1})) \subseteq \ker(v^n)$. $v(\ker(v^0))$ fermé.
 $\Rightarrow$ on tombe sur la même situation que précédemment $\Rightarrow$ absurde.

Supposons $d(u) = +\infty$; on a: $\text{Im}(v^0) \subsetneq \text{Im}(v^1) \subsetneq \dots \subsetneq \text{Im}(v^n) \subsetneq \dots$ et $v(\text{Im}(v^n)) \subseteq \text{Im}(v^{n+1})$.

Or, $v^n = (I - u)^n = I - \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} u^k$ donc, par 2): $\text{Im}(v^n)$ est fermé dans E .

On peut alors faire exactement la même chose (On a $d(u) = d(v)$ par le lemme 1).

5) $v \text{ inj} \Leftrightarrow d(u) = 0 \Leftrightarrow d(v) = 0 \Leftrightarrow v \text{ surj}$ et $v \text{ bij} \Leftrightarrow v \in \text{GL}(E)^*$ par le th. d'iso de Banach (c'est la preuve de 2)).

2) (du th)

par la prop.

Pour $\lambda \in K \setminus \{0\}$, on a: $\lambda \in \sigma(u) \Leftrightarrow \lambda I - u \notin \text{GL}(E)^* \Leftrightarrow I - \frac{u}{\lambda} \notin \text{GL}(E)^* \Leftrightarrow I - \frac{u}{\lambda}$ non inj $\Leftrightarrow \lambda \in \sigma_p(u)$.

Soit $\lambda \in \sigma(u) \setminus \{0\}$: Par compacité de u : $u(\bar{B}(E\lambda))$ est relativement compacte. Or $u|_{E\lambda} = \lambda I$ donc:

$u(\bar{B}(E\lambda)) = \lambda \bar{B}(E\lambda)$. Par Riesz: $\dim E\lambda < +\infty$.

3) Il suffit de mg. $\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda \in \sigma(u), \|\lambda e\| < \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$, supposons $\|\sigma(u) \cap \{\lambda \mid \|\lambda e\| \geq \varepsilon\}\| = +\infty$. $\exists (\lambda_n) \in \sigma(u)^N$ suite injective tq $\forall n, \|\lambda_n\| \geq \varepsilon$.

Notons $V_n := E_{\lambda_n} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_n}$ ou fermé de E et $V_n \not\subseteq V_{n+1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$: on a $(I - \frac{u}{\lambda_n})(V_n) \subseteq V_{n-1}$, donc, par le lemme 2: $\exists e_n \in \mathcal{B}(V_n), \forall a \in V_{n-1}: \| \frac{u(e_n)}{\lambda_n} - \frac{u(a)}{\lambda_n} \| \geq \frac{1}{2}$.

En particulier: $\forall n \geq 1, \forall j < n: \|u(e_n) - u(e_j)\| \geq \frac{\|\lambda_n\|}{2} \geq \frac{\varepsilon}{2}$.

no $(u(e_n))$ n'a pas de sous-suite convergente: absurde.