

* Méthode de quadrature de Gauss: degrés $\tilde{144}, 209, 218, 286$ [Analysen] X.4

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $I(P) := \int_{-1}^1 P(t) dt$ et on munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = I(PQ)$. On notera $(P_k)_{k \geq 0}$ la base orthonormée obtenue par la méthode de Gram-Schmidt sur $(X^k)_{k \geq 0}$.

1) P_n possède n racines simples distinctes $-1 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1$. ($n \geq 1$)

2) Soient $(L_i)_{i=0, \dots, n}$ les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux $(x_i)_{i=0, \dots, n}$ et $\lambda_i = I(L_i)$. Alors, $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$: $I(P) = \mathcal{L}_n(P) := \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i)$. De plus: $\lambda_i > 0$

3) On prolonge la définition de I et S_n aux $f \in \mathcal{C}([-1,1])$. Alors:

$$\forall f \in \mathcal{C}^n([-1,1]): |I(f) - S_n(f)| \leq \frac{4M}{(2n+1)!} \quad \text{où } M := \|f^{(2n+1)}\|_{\infty, [-1,1]}$$

preuve:

1) Choisissons $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ les racines de P_n de multiplicités impaires et qui se trouvent dans $]-1,1[$ (sans répétition). On a $0 \leq k \leq n$, supposons par l'absurde $k < n$.

$$\text{Posons } R_n := \prod_{i=1}^k (x - \alpha_i) \in R_{n-k}[X].$$

Par construction de P_n , on a donc:

$$0 = \langle P_n, R_n \rangle = I(P_n R_n)$$

Or, $P_n R_n$ n'a que des racines de multiplicités paires dans $]-1,1[$ donc on peut écrire $P_n R_n = Q^2 S$ avec $Q, S \in R[X]$ et S ne s'annulant pas dans $]-1,1[$.

En particulier, $P_n R_n$ est du signe de S sur $]-1,1[$ donc est de signe constant sur $[-1,1]$.

Or, $I(P_n R_n) = \int_{-1}^1 P_n R_n = 0$ et donc comme $P_n R_n$ est continu, il est identiquement nul sur $[-1,1]$. Ainsi, $P_n R_n$ a une infinité de racines donc $P_n R_n = 0$ absurde.

On en déduit $k = n$ et donc $\deg R_n = \deg P_n$. Or, $R_n \nmid P_n$ donc R_n et P_n sont associées: ils ont les mêmes racines, ce qui permet de conclure.

2) Soit $P \in R_n[X]$:

$(L_1, \dots, L_n)$ est la base orthogonale associée à la base $(e_1, \dots, e_n)$ de $R_n[X]$ et donc: $P = \sum_{i=1}^n P(\alpha_i) L_i$

$$\text{Ainsi: } I(P) = \sum_{i=1}^n P(\alpha_i) I(L_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(\alpha_i) = S_n(P)$$

• Pour P_n on a:

$$I(P_n) = I(P_n, 1) = \langle P_n, 1 \rangle = 0 \quad \text{car } P_n \perp R_0[X]$$

$$\text{et } S_n(P_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_n(\alpha_i) = 0 \quad \text{car les } \alpha_i \text{ sont les racines de } P_n$$

La formule se prolonge sur tout $R_n[X]$ car $(P_0, \dots, P_n)$ en est une base et par linéarité de I et S_n .

• Soit $P \in R_{n+1}[X]$:

soit $P = QP_n + R$ la division euclidienne de P par P_n avec $\deg Q = n-1$ et $\deg R \leq n-1$.

On a: $I(P) = I(P_n Q) + I(R)$

$= \langle P_n, Q \rangle + I(R)$

$= I(R)$

car $P_n \perp Q$

$= S_n(R)$

par ce qu'on vient de faire

$= S_n(P_n Q + R)$

car $P_n Q$ s'annule en les ds

$= S_n(P)$

• Finalement, on a, comme $\deg(L_i^2) = 2\deg L_i = 2(n-1) \leq 2n-1$:

$0 < \int_{-1}^1 L_i^2 = I(L_i^2) = S_n(L_i^2) = \sum_{j=1}^n \lambda_j L_i^2(x_j) = \lambda_i$

2) Posons $P_i = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ et $u(x) := f(x) - P(x)$.

Par la question précédente, on a: $I(P) = S_n(P)$ et donc:

$|I(f) - S_n(f)| = |I(f) - I(P) + S_n(P) - S_n(f)|$

$= |I(f - P) - S_n(f - P)|$

$= |I(u) - S_n(u)|$

$\leq |I(u)| + |S_n(u)|$

De plus, par l'inégalité de Taylor-Lagrange:

$\forall x \in [-1, 1], |u(x)| \leq M \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Ainsi: $|I(u)| \leq \int_{-1}^1 |u|$

$\leq \frac{2M}{(2n)!} \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{2M}{(2n+1)!}$

* d'où $|S_n(u)| \leq \frac{2M}{(2n+1)!}$:

Soit $x^{2n} = P_n Q + R$ la division euclidienne de x^{2n} par P_n .

$\forall x \in \mathbb{R}: x^{2n} \geq 0$ donc $S_n(x^{2n}) \geq 0$ (car les λ_i sont > 0).

Or: $S_n(x^{2n}) = S_n(P_n Q + R)$

$= \underbrace{S_n(P_n Q)}_{=0} + S_n(R)$

$= S_n(R)$

$= I(R)$

par la question précédente.

$= I(x^{2n} - P_n Q)$

$= I(x^{2n}) - I(P_n Q)$

On a:
$$I(X^{2n}) = \int_{-1}^1 x^{2n} dx = 2 \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{2}{2n+1}$$

De plus, $X^{2n} = P_n Q + R$ est univariée donc $P_n Q$ aussi. On en déduit que

la division euclidienne de Q par P_n est de la forme:

$$Q = \frac{1}{\gamma_n} P_n + \tilde{R} \quad \text{où } \gamma_n > 0 \text{ est le coefficient de } P_n \text{ devant } X^n$$

Ainsi:
$$\begin{aligned} I(P_n Q) &= I\left(\frac{P_n^2}{\gamma_n}\right) - I(P_n \tilde{R}) \\ &= I\left(\left(\frac{P_n}{\gamma_n}\right)^2\right) - \underbrace{I(P_n \tilde{R})}_{=0} \\ &= I\left(\left(\frac{P_n}{\gamma_n}\right)^2\right) > 0 \end{aligned}$$

Donc:
$$\begin{aligned} \delta_n(X^{2n}) &= I(X^{2n}) - I(P_n Q_n) \\ &= \frac{2}{2n+1} - I\left(\left(\frac{P_n}{\gamma_n}\right)^2\right) \\ &\leq \frac{2}{2n+1} \end{aligned}$$

Donc:
$$\begin{aligned} |\delta_n(u)| &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i |u(x_i)| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{M x_i^{2n}}{(2n)!} \\ &= \frac{M}{(2n)!} \delta_n(X^{2n}) \\ &\leq \frac{2M}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Ainsi, finalement:

$$\begin{aligned} |I(f) - \delta_n(f)| &\leq |I(u)| + |\delta_n(u)| \\ &\leq \frac{4M}{(2n+1)!} \end{aligned}$$