

* Équation différentielle dans les espaces de Holder: leçon 204, 208, 221, 228, 241 (203)

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in]0, 1[$.

On note $\mathcal{C}^{0,\alpha}(I) := \{f \in \mathcal{C}^0(I), \forall x, y \in I: |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha, \text{ et } f \text{ bornée}\}$. [quelques-uns] III 3.4
 α "automatique" si I borné

On munit $\mathcal{C}^{0,\alpha}(I)$ de la norme $\|f\|_\alpha := \|f\|_\infty + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$

On note également: $\mathcal{C}^{n,\alpha}(I) := \{f \in \mathcal{C}_b^n(I), \forall k \in [0, n], f^{(k)} \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(I)\}$

On munit $\mathcal{C}^{n,\alpha}(I)$ de la norme $\|f\|_{n,\alpha} := \sum_{k=0}^n \|f^{(k)}\|_\alpha$, qui est équivalente à la norme

$$\|f\|_{n,\alpha} := \sum_{k=0}^{n-1} \|f^{(k)}\|_\infty + \|f^{(n)}\|_\alpha.$$

Th:

Soient $\alpha \in]0, 1[$ et $q \in \mathcal{C}^{0,\alpha}([0, 1])$, $q \geq 0$.

Alors:

$$\forall f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}([0, 1]), \text{ le problème } \begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = f(x), & x \in]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}([0, 1])$ $\swarrow \mathcal{C}^{k,\alpha}(I) \subseteq \mathcal{C}^k(I)$ (inclusion $\mathcal{C}^0$).

Dans la suite, on note $E := \{u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}([0, 1]), u(0) = u(1) = 0\}$. C'est un espace de Banach en tant que sous-fermé de $\mathcal{C}^{2,\alpha}([0, 1])$.

Lemme:

$\exists C_q$ une constante tq:

$$\forall u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}([0, 1]) \text{ tq } u(0) = u(1) = 0, \text{ on a: } \|u\|_\infty \leq C_q \|u'' - qu\|_\infty$$

De plus, C_q ne dépend que de $\|q\|_\infty$, et ce de manière croissante.

preuve du lemme:

$$\text{Notons } P: \{u \in \mathcal{C}^2([0, 1]), u(0) = u(1) = 0\} \longrightarrow \mathcal{C}^0([0, 1])$$

$$u \longmapsto u'' - qu$$

On a: $\forall x \in [0,1]: 0 \leq q(x) \leq \|q\|_\infty$.

Soit $\lambda := \sqrt{\|q\|_\infty + 1}$ et $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto e^\lambda - e^{\lambda x}$

On a: $0 \leq g \leq e^\lambda := C_q$ (qui est bien une fct $\uparrow$ de $\|q\|_\infty$).

De plus:
$$\begin{aligned} P_g &= -\lambda^2 e^\lambda + q e^{\lambda x} - q e^\lambda \\ &= (q - \|q\|_\infty - 1) e^\lambda - q e^\lambda \\ &\leq -e^\lambda \\ &\leq -1 \end{aligned}$$

Prenons $v: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^\infty([0,1]) \subseteq \mathcal{C}^2([0,1])$ et $w := u - v$
 $x \mapsto g(x) \|P_u\|_\infty$

On a: $w(0) = -v(0) \leq 0$ et $w(1) = -v(1) \leq 0$

De plus: $P_w = P_u - \|P_u\|_\infty P_g \geq P_u + \|P_u\|_\infty \geq 0$.

On veut alors montrer une sorte de principe du max. sur w pour déduire:

$$\forall x \in [0,1]: w(x) \leq 0. \quad (*)$$

Remarquons tout d'abord que (*) est vraie lorsque $q=0$. En effet, on a alors

$P_w = w'' \geq 0$, donc w est convexe sur $[0,1]$. Ainsi: $\forall x \in [0,1]: w(x) \leq (1-x)w(0) + xw(1) \leq 0$.

On va se ramener à ce cas.

Notons $I := \{x \in]0,1[, w(x) > 0\}$ ouvert induit dans $]0,1[$. On voit mg $I = \emptyset$. Supposons que ce ne soit pas le cas: $\exists \mathcal{I}$ ensemble non vide au plus dénombrable tq $I = \bigcup_{n \in \mathcal{I}}]a_n, b_n[$ avec

$a_n < b_n$. Soit $n \in \mathcal{I}$: $\forall x \in]a_n, b_n[: P_w(x) \geq 0$ donc $w''(x) \geq q(x)w(x) \geq 0$.

De plus, $a_n, b_n \in \partial I$ donc $w(a_n), w(b_n) \leq 0$. Ainsi, on s'est ramené au cas $q=0$ et donc $w \leq 0$ sur $]a_n, b_n[$: absurde.

Donc: (*) est vérifiée, i.e.: $\forall x \in [0,1]: u(x) \leq v(x) = g(x) \|P_u\|_\infty \leq C_q \|P_u\|_\infty$.

On peut faire la même chose avec $\tilde{w} := -u - v$ qui vérifie également $w(0), w(1) \leq 0$ et $P_w \geq 0$ et donc: $\forall x \in [0,1]: -u(x) \leq C_q \|P_u\|_\infty$.

Ce qui nous donne le résultat voulu.

preuve du théorème:

unicité: c'est une conséquence immédiate du lemme: si u et v sont solutions, alors

$(u-v)(0) = (u-v)(1) = 0$ et $P(u-v) = 0$ donc, par le lemme, $\|u-v\|_\infty \leq 0$.

* existence:

On note $A := \{t \in [0,1], \forall f \in \mathcal{C}^{2,\alpha}([0,1]), \begin{cases} -u'' + tu = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \text{ admet une unique solution dans } \mathcal{C}^{2,\alpha}([0,1])\}$

Remarquons que $0 \in A$. En effet, $u(x) = -\int_0^x \int_0^t f(u) du dt + x \int_0^1 \int_0^t f(u) du dt$ est une solution dans $\mathcal{C}^{2,\alpha}([0,1])$ et l'unicité a déjà été vue.

On va mq A est ouvert-fermé dans $[0,1]$, ce que nous permettra de conclure par connexité de $[0,1]$.

Pour $t \in [0,1]$, notons $P_t: E \rightarrow F := \mathcal{C}^{2,\alpha}([0,1])$ (rappel: $E = \{u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}([0,1]), u(0) = u(1) = 0\}$)
 $u \mapsto -u'' + tu$

P_t est une application linéaire continue ($\|P_t(u)\|_X \leq \|u''\|_X + t\|u\|_\infty \|u\|_X \leq H\|u\|_{2,\alpha}$ avec H indep. de t)

Grâce à l'unicité, on a:

$$A = \{t \in [0,1], P_t \text{ est bijective}\} \quad (1)$$

$$= \{t \in [0,1], P_t \text{ est surjective}\} \quad (2)$$

$$= \{t \in [0,1], P_t \text{ est un isomorphisme}\} \quad (3)$$

grâce au théorème d'iso. de Banach

• A est ouvert:

Soit $t_0 \in A$: par (3), $\exists Q \in \mathcal{L}(F, E)$, $P_{t_0} \circ Q = \text{id}_E$

Or, $t \mapsto P_t$ est continue et $\mathcal{L}(F)^X$ est ouvert dans $\mathcal{L}(F)$. Donc, pour t proche de t_0 : $P_t \circ Q \in \mathcal{L}(F)^X$, donc P_t surjective donc $t \in A$ par (1).

• A est fermé:

Soit $(t_n) \in A^n$ tq $t_n \rightarrow t \in [0,1]$. Soit $f \in \mathcal{C}^{2,\alpha}([0,1])$

Par hyp, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists u_n \in \mathcal{C}^{2,\alpha}([0,1])$, $P_{t_n}(u_n) = f$.

* d'q (u_n) est bornée dans $\mathcal{C}^{2,\alpha}$:

$$\|u_n\|_{2,\alpha} = \|u_n'\|_\infty + \|u_n''\|_\infty + \|u_n''\|_\alpha$$

$$\text{- Par le lemme: } \forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\|_\infty \leq C_{t_n} \|P_{t_n}(u_n)\|_\infty \leq C_q \|f\|_\infty =: K \quad (A)$$

- soit $\varepsilon > 0$.

$$\rightarrow \text{d'q } \exists C_\varepsilon > 0, \forall v \in \mathcal{C}^{2,\alpha}([0,1]): \|v\|_{1,\alpha} \leq \varepsilon \|v\|_{2,\alpha} + C_\varepsilon \|v\|_\infty$$

$$\text{et mq, } \exists (v_n) \in (\mathcal{C}^{2,\alpha})^N, \forall n: \|v_n\|_{2,\alpha} = 1 \text{ et } \|v_n\|_{1,\alpha} \geq \varepsilon + n \|v_n\|_\infty$$

d'inclusion $\mathcal{C}^{2,\alpha} \subseteq \mathcal{C}^{1,\alpha}$ est compacte, quitte à extraire, on a $v_n \rightarrow v$ dans $\mathcal{C}^{1,\alpha}$.

On a donc $\|v_n\|_{1,\alpha} \leq \frac{\varepsilon}{n} \|v_n\|_{2,\alpha} - \frac{\varepsilon}{n} \rightarrow 0$.

Or, l'inclusion $\mathcal{C}^{1,\alpha} \subseteq \mathcal{C}^0([0,1])$ est continue donc $\|v_n\|_{1,\alpha} \rightarrow \|v\|_{1,\alpha}$ et donc $\|v\|_{1,\alpha} = 0$, i.e. $v=0$.

Or, $\forall n : \|v_n\|_{2,\alpha} \geq \varepsilon$ donc $\|v\|_{2,\alpha} \geq \varepsilon > 0$: absurde.

Ainsi, $\exists C_\varepsilon$ tq : $\forall n : \|u_n\|_{2,\alpha} \leq \varepsilon \|u_n\|_{2,\alpha} + C_\varepsilon \|u_n\|_{1,\alpha}$

Donc, par (A) : $\forall n : \|u_n\|_{2,\alpha} \leq \varepsilon \|u_n\|_{2,\alpha} + C_\varepsilon C_0 \|u_n\|_{1,\alpha}$ (B)

De plus, $\|\cdot\|_{2,\alpha}$ étant une norme d'algèbre, on a : $\|u\|_{2,\alpha} \leq \|u\|_{1,\alpha} \|u\|_{2,\alpha}$

$$\begin{aligned} \forall n : \|u_n\|_{2,\alpha} &\leq \|u_n\|_{1,\alpha} \|u_n\|_{2,\alpha} + \varepsilon \|u_n\|_{2,\alpha} \\ &\leq \|u_n\|_{1,\alpha} + \varepsilon \|u_n\|_{2,\alpha} \\ &\leq \|u_n\|_{1,\alpha} + \varepsilon \|u_n\|_{2,\alpha} + C_\varepsilon C_0 \|u_n\|_{1,\alpha} \end{aligned}$$

$$\leadsto \forall n : \|u_n\|_{2,\alpha} \leq \varepsilon \|u_n\|_{2,\alpha} + K_\varepsilon \quad \text{avec} \quad K_\varepsilon := \|u_n\|_{1,\alpha} + C_\varepsilon C_0 \|u_n\|_{1,\alpha} \quad (C)$$

Par (A), (B) et (C), on a :

$$\begin{aligned} \forall n : \|u_n\|_{2,\alpha} &= \|u_n\|_{1,\alpha} + \|u_n\|_{2,\alpha} + \|u_n\|_{2,\alpha} \\ &\leq K + \varepsilon \|u_n\|_{2,\alpha} + K_\varepsilon + \varepsilon \|u_n\|_{2,\alpha} + K_\varepsilon \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \forall n : (1 - \varepsilon - \varepsilon \|u_n\|_{2,\alpha}) \|u_n\|_{2,\alpha} \leq K + K_\varepsilon + K_\varepsilon =: K_\varepsilon''$$

Par ε assez petit, on a : $1 - \varepsilon - \varepsilon \|u_n\|_{2,\alpha} \geq \frac{1}{2}$ et donc :

$$\forall n : \|u_n\|_{2,\alpha} \leq 2K_\varepsilon''$$

Donc, (u_n) est bornée dans $\mathcal{C}^{2,\alpha}$.

Par un lemme du plan, $\exists u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}$ tq $\forall \alpha' > \alpha : \|u_n - u\|_{2,\alpha'} \rightarrow 0$.

En particulier, $\forall k \in [0,2]$: $u_n^{(k)} \xrightarrow{C^0} u^{(k)}$

Donc, en passant à la limite dans $f - u'' + b_0 u = f$, on trouve : $f - u'' + b_0 u = f$
 $u(0) = u(1) = 0$

Donc A est fermé et donc $A = [0,1]$, ce qui permet de conclure.