

(* Surjectivité de l'exponentielle matricielle sur $GL(C)$:) desons 155, 204, 214, (150), (106)

1) $\forall A \in GL(C) : A \in \exp(C[X])$, en particulier : $\exp: dln(C) \rightarrow GL(C)$ est surjective.

[Jennings
Pecote]
63

$$2) \exp(GL_n(R)) \exp(dln(R)) = GL_n(R)^2$$

preuve:

1) Soit $A \in GL(C)$.

Soit $\mathcal{E} := \{P(A), P \in C[X], P_{1,0} = 1\} = C[X] \cap GL(C)$ car $P(A) \in GL(C) \Leftrightarrow P_{1,0} = 1$.

On pose $f: C[X] \rightarrow \mathcal{E}$ $\mathcal{C}^\infty$ dès lors qu'on montre qu'elle est bien def.

Or $C[X]$ est fermé à $\forall H \in C[X] : \exp(H) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^n \frac{H^k}{k!}$ donc $\exp(H) \in C[X]$, et $\exp(H) \in GL(C)$ donc f bien def.

Par ailleurs, $\mathcal{E}$ est un groupe pour la multiplication de $C[X]$ algèbre commutative donc f est un morphisme de groupes. (*)

f est $\mathcal{C}^\infty$ sur le Banach $C[X]$ (convergence normale de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ pour req exp est $\mathcal{C}^\infty$)
et $f(H) = f(0) + H + o(H)$ donc $df = \text{idem}$ inversible ^{direct} et ainsi, par le théorème d'inverse locale, f est un $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme local en 0. En particulier, $\exists \varepsilon > 0, B(0, \varepsilon) \cap \mathcal{E} \subseteq f(C[X])$.

Par (*), $f(C[X])$ est un groupe pour la multiplication, donc

$$\forall H \in f(C[X]), \underbrace{H \cdot B(0, \varepsilon) \cap \mathcal{E}}_{= B(H, \varepsilon \|H\|) \cap \mathcal{E} \text{ car } H \text{ inversible}} \subseteq f(C[X])$$

$\leadsto f(C[X])$ est ouverte dans $\mathcal{E}$.

$$\text{Or } \mathcal{E} \setminus f(C[X]) = \bigcup_{H \in \mathcal{E} \setminus f(C[X])} \underbrace{H \cdot f(C[X])}_{\text{ouvert car } H \text{ inversible et } H \in \mathcal{E}}$$

Donc $f(C[X])$ également fermée dans $\mathcal{E}$.

• Soit $P \in C[X]$ tq $P_{1,0} = 1$ $\det((1-X)P(A) + X I_n) \in C[X]$ non 0 et ne s'annule pas en 0 et en 1. Ainsi, $\exists \gamma: [0,1] \rightarrow C$ chemin $\mathcal{C}^\infty$ dans C tq $\gamma(0)=0$ et $\gamma(1)=1$
et $\forall t \in [0,1] : \det((1-\gamma(t))P(A) + \gamma(t)I_n) \neq 0$ (on évite les racines)

On a alors : $\forall t \in [0,1] : (1-\gamma(t))P(A) + \gamma(t)I_n \in GL(C) \cap C[X] = \mathcal{E}$.

$\leadsto \mathcal{E}$ connexe par arcs $\leadsto \mathcal{E}$ connexe.

Or, $f(C[X])$ ouvert-fermé non vide, donc : $f(C[X]) = \mathcal{E} \ni A$

2). Soit $A \in dln(R) : \exp(A) = \exp\left(\frac{A}{2}\right)^2 \in GL_n(R)^2$.

• Soit $B = A^2 \in GL_n(R)^2$. Par 1), $A = \exp(P(A))$ avec $P \in C[X]$. $\leadsto B = A\bar{A} = \exp\left(\overbrace{(P+\bar{P})}^{\in dln(R)}\right)(A)$