

* Polynômes et fonctions de Hermite : voyons 243, 284, 250

[EP Ammann, Fourier] I.15 et I.35

On note $w: x \mapsto e^{-x^2}$. On note également $L_w^2 := \{f \in L^1(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 w(x) dx < +\infty\}$ qui est un Hilbert pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle_w := \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} w(x) dx$.

Soient, pour $n \in \mathbb{N}$: $H_n: x \mapsto (-1)^n e^{x^2} D^n(e^{-x^2})$ où $D = \frac{d}{dx}$. (On vérifie aisément: $H_n \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R})$)

Alors:

1) $\forall n \in \mathbb{N}$: $H_{n+1} = (2x - D)H_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $DH_n = 2nH_{n-1}$

2) $(H_n)_{n \geq 0}$ est une famille orthogonale totale de L_w^2 et $\|H_n\|_w^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $h_n: x \mapsto e^{-x^2/2} H_n(x)$ la n-ième fonction de Hermite. $(h_n)_{n \geq 0}$ est une famille orthogonale totale de L^2 .

Alors:

3) $\forall n \in \mathbb{N}$: $(-D^2 + x^2)h_n = (2n+1)h_n$

4) $\forall n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{F}(h_n) = (-i)^n \sqrt{2\pi} h_n$ (C'est fait différemment dans le EP Ammann)

preuve:

$$\begin{aligned} 1) e^{-x^2} H_{n+1}(x) &= (-1)^{n+1} D^{n+1}(e^{-x^2}) \\ &= -D((-1)^n D^n(e^{-x^2})) \\ &= -D(e^{-x^2} H_n(x)) \\ &= 2x e^{-x^2} H_n(x) - e^{-x^2} H_n'(x) \end{aligned}$$

Donc: $H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - H_n'(x)$.

* On montre par récurrence sur $n \geq 1$: $DH_n = 2nH_{n-1}$

• $n=1$: $H_0 = 1$ et $H_1(x) = 2x$ donc c'est bon.

• supposons le résultat acquis pour un $n \geq 1$; alors:

$$\begin{aligned} DH_{n+1} &= D((2x - D)H_n) \\ &= D(2xH_n - DH_n) \quad \text{par H.R.} \\ &= 2H_n + 2x DH_n - 2n DH_{n-1} \\ &= 2H_n + 2n(2xH_{n-1} - DH_{n-1}) \quad \text{encore par H.R.} \\ &= 2H_n + 2nH_n \\ &= 2(n+1)H_n. \end{aligned}$$

de principe de récurrence permet de conclure

2) * Soit $P \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \text{On a: } \langle P, H_n \rangle_w &= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) D^n(e^{-x^2}) dx \\ &\stackrel{\text{I.P.}}{=} (-1)^n \left(\underbrace{\left[P(x) D^{n-1}(e^{-x^2}) \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x) D^{n-1}(e^{-x^2}) dx \right) \\ &= (-1)^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x) D^{n-1}(e^{-x^2}) dx = \langle P', H_{n-1} \rangle_w \end{aligned}$$

On en déduit par récurrence: $\langle p, H_0 \rangle_w = \langle p^{(n)}, H_0 \rangle_w = \int_{-\infty}^{+\infty} p^{(n)}(x) e^{-x^2} dx$.

En particulier: $H_n \in C_{n-1}[X]^{\perp, w}$ et donc $\langle H_n, H_k \rangle_w = 0 \quad \forall k \leq n-1$, i.e. $\{H_n\}_{n \geq 0}$ est orthogonale.

$$* \langle H_n, H_n \rangle_w = \langle H_n, 2xH_{n-1} - H_{n-1}' \rangle_w$$

par la 1)

$$= \langle H_n, 2xH_{n-1} \rangle_w$$

car $H_{n-1}' \in H_{n-1}[X]$

$$= \langle H_n, (2x)^n H_0 \rangle_w$$

par récurrence

$$= 2^n \langle H_n, x^n \rangle_w$$

$$= 2^n n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

par ce qu'on vient de dire

$$= 2^n n! \sqrt{\pi}$$

* Soit $f \in L_w^2$ tq $f \in \{H_n, n \geq 0\}^\perp = C_n[X]^\perp$.

Soit $t \in \mathbb{R}$, sans souci de justifier l'inversion série-intégrale, on a:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(x)e^{-x^2})(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-itx} e^{-x^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(x) (-itx)^n}{n!} e^{-x^2} dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-it)^n}{n!} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) x^n e^{-x^2} dx}_{=0 \text{ par hyp.}} = 0 \end{aligned}$$

(Pour considérer la transformée de Fourier comme on vient de le faire, il faut justifier que $x \mapsto f(x)e^{-x^2} \in L^1$. C'est le cas car $|f(x)|e^{-x^2} \leq |f(x)|^2 e^{-x^2} + e^{-x^2}$).

Donc, par injectivité de la transformée de Fourier sur L^1 , on a $f(x)e^{-x^2} = 0$ presque partout et donc $f(x) = 0$ presque partout.

Donc, $\{H_n\}_{n \geq 0}$ est bien totale. (J'ai oublié de justifier l'inverse mdr, je le fais après.)

$$3) \text{ On a } h_n''(x) = D^2(e^{-x^2/2} H_n(x)) = D(e^{-x^2/2} H_n'(x) - x e^{-x^2/2} H_n(x)) = e^{-x^2/2} H_n''(x) - 2x e^{-x^2/2} H_n'(x) + x^2 e^{-x^2/2} H_n(x) - e^{-x^2/2} H_n(x)$$

$$\text{Ainsi: } x^2 h_n(x) - h_n''(x) = e^{-x^2/2} (2x H_n'(x) - H_n''(x) + H_n(x))$$

$$= e^{-x^2/2} (2x H_{n-1}(x) - 2x H_{n-1}'(x) + H_n(x))$$

par la 1)

$$= e^{-x^2/2} (2x h_n(x)) + h_n(x)$$

encore par la 1)

$$= (2n+1) h_n(x)$$

$$4) \text{ Pour } n \geq 0, \text{ on a } h_n'(x) = D(e^{-x^2/2} H_n(x)) = e^{-x^2/2} H_n'(x) - x e^{-x^2/2} H_n(x)$$

$$\text{Donc: } x h_n(x) - h_n'(x) = e^{-x^2/2} (2x H_n(x) - H_n'(x)) = e^{-x^2/2} H_{n+1}(x) = h_{n+1}(x). \quad (*)$$

On va montrer le résultat par récurrence.

$n=0$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}e(h_0)(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} e^{-i\xi x} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}((x+i\xi)^2 + \xi^2)\right) dx \\
 &= e^{-\xi^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}} dx \\
 &= e^{-\xi^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} dy \quad \text{en appliquant le théorème des résidus à } z \mapsto e^{-z^2/2} \\
 &= e^{-\xi^2/2} \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \\
 &= \sqrt{2\pi} h_0(\xi)
 \end{aligned}$$

• supposons le résultat acquis pour un $n \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 \text{Par (*) : } \mathcal{F}(h_{n+1})(\xi) &= \mathcal{F}(x h_n - h_n')(\xi) \\
 &= i \mathcal{F}(h_n)'(\xi) - i \xi \mathcal{F}(h_n)(\xi) \quad \text{par les propriétés de la transformée de Fourier} \\
 &= i((-i)^n \sqrt{2\pi} h_n(\xi) - \xi (-i)^n \sqrt{2\pi} h_n(\xi)) \quad \text{par H.R.} \\
 &= (-i)(-i)^n \sqrt{2\pi} h_{n+1}(\xi) \quad \text{par (*)} \\
 &= (-i)^{n+1} \sqrt{2\pi} h_{n+1}(\xi)
 \end{aligned}$$

de principe de récurrence permet de conclure

justification de l'intervalle dans 2):

$$\text{Il suffit de montrer que } \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \frac{|h_n|^n}{n!} e^{-x^2} dx < +\infty.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Or, } \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \frac{|h_n|^n}{n!} e^{-x^2} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| e^{|h_{n+1}|} e^{-x^2} dx \\
 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 e^{-x^2} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2|h_{n+1}|} e^{-x^2} dx < +\infty.
 \end{aligned}$$