

1) Soit  $y$  une solution globale sur l'intervalle  $I$  de l'équation de Riccati:

$$y' = a(t) + b(t)y + c(t)y^2 \quad (R)$$

où  $a, b, c$  sont continues sur  $I$ . On suppose de plus que  $c$  est dérivable et ne s'annule pas. Soit  $t_0 \in I$  et posons  $z(t) := \exp(-\int_{t_0}^t c(s)y(s)ds)$ . Alors,  $z$  est solution de :

$$z'' - \left( \frac{c'(t)}{c(t)} + b(t) \right) z' + a(t)c(t)z = 0$$

2) On considère l'équation :

$$y' = 2 + ty + y^2 \quad (R_0)$$

Posons  $z_1(t) = 1 - t^2$ . Alors :

$\forall y_0 \in \mathbb{R}$

$\exists z_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction DSE de rayon infini tq  $z_2$  solution maximale de  $(R_0)$  avec  $y(0) = y_0$  et  $-\frac{z_1' - y_0 z_1'}{z_1 - y_0 z_1}$  et son intervalle de définition est la compacte comme de 0 dans  $\{z_1 - y_0 z_2 \neq 0\}$

preuve :

1) On a  $z_1'(t) = -c(t)y(t)z_1(t)$  et donc  $y(t) = -\frac{1}{c(t)} \frac{z_1'(t)}{z_1(t)}$

On a donc également :  $y'(t) = \frac{c'(t)}{c(t)^2} \frac{z_1'(t)}{z_1(t)} - \frac{1}{c(t)} \frac{z_1''(t)}{z_1(t)} + \frac{1}{c(t)} \frac{z_1'(t)^2}{z_1(t)^2}$

En substituant dans  $(R)$ , il vient :

$$\frac{c'(t)}{c(t)^2} \frac{z_1'(t)}{z_1(t)} - \frac{1}{c(t)} \frac{z_1''(t)}{z_1(t)} + \frac{1}{c(t)} \left( \frac{z_1'(t)}{z_1(t)} \right)^2 = a(t) - \frac{b(t)}{c(t)} \frac{z_1'(t)}{z_1(t)} + \frac{c(t)}{c(t)^2} \left( \frac{z_1'(t)}{z_1(t)} \right)^2$$

En multipliant par  $c(t)z_1(t)$  (qui ne s'annule pas), on trouve :

$$\frac{c'(t)}{c(t)} z_1'(t) - z_1''(t) = a(t)c(t)z_1(t) - b(t)z_1'(t)$$

Ce qu'on peut bien réécrire comme :

$$z_1'' - \left( \frac{c'(t)}{c(t)} + b(t) \right) z_1' + a(t)c(t)z_1 = 0$$

2) On raisonne par analyse-synthèse :

\* Analyse :

Soit  $y$  une solution maximale de  $(R_0)$  avec  $y(0) = y_0$  et  $I$  son intervalle de définition

On est dans les hypothèses de 1) avec  $a(t) = 2$ ,  $b(t) = t$  et  $c(t) = 1$ , on peut donc appliquer la méthode précédente.

Soit  $z(t) = \exp(-\int_0^t y(s) ds)$ ,  $z$  est solution sur  $I$  de :

$$z'' - t z' + 2z = 0 \quad (E)$$

Cherchons une solution  $u$  de la forme  $u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$

On a :

$$\begin{aligned} u''(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} t^n \\ -tu'(t) &= -\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^n \\ 2u(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n t^n \end{aligned}$$

Ainsi, si une telle solution existe et a un rayon de convergence non nul, alors on a :

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - na_n + 2a_n = 0 \quad \forall n \geq 0$$

Donc,  $\forall n \geq 2$  :  $a_n = \frac{n-4}{n(n-1)} a_{n-2}$

En particulier,  $a_4 = 0$  et donc  $\forall n \geq 2$  :  $a_{2n} = 0$ , et  $a_2 = -a_0$ .

En outre :

$$\forall n \geq 1 : a_{2n+2} = \frac{2n-3}{(2n+1)2n} a_{2n+2}$$

Donc, on déduit par récurrence :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1 : a_{2n+2} &= \frac{(2n-3)(2n-5) \dots \times 5 \times 3 \times 1 \times (-1)}{(2n+1)!} \times a_2 \\ &= \frac{(2n-2)!}{(2n+1)! 2^{n-1} (n-1)!} \times (-a_1) \\ &= \underbrace{\frac{(2n-2)!}{(2n+1)! 2^{n-1} (n-1)!}}_{=: b_n} \times (-a_1) \end{aligned}$$

⚠ erreur dans le Bethelin

Pour  $a_0 = 1$  et  $a_1 = 0$ , on trouve :  $z_1(t) = 1 - t^2$

Pour  $a_0 = 0$  et  $a_1 = 1$ , on trouve :  $z_2(t) = t - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{(2n+1)! 2^{n-1} (n-1)!} t^{2n+1}$

Ces deux fonctions sont alors solutions particulières de (E) par construction (on peut le vérifier facilement par  $z_1$ ) dès lors qu'on a montré qu'elles ont un rayon de convergence assez grand.

Il est clair que  $z_2$  a un rayon de convergence infini, donc c'est une solution de (E) sur  $\mathbb{R}$ .

Par ailleurs, en posant  $b_n = \frac{(2n-2)!}{(2n+1)! 2^{n-1} (n-1)!}$ , on a :  $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2n}{(2n+3) \times 2n} = \frac{1}{2n+3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Donc il en est de même pour  $z_2$ .

Ainsi,  $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tq :  $\forall t \in I: z(t) = \lambda z_1(t) + \mu z_2(t)$ .

Or, on a :  $z(0) = 1$  ;  $z_1(0) = 1$  ;  $z_2(0) = 0$

$$z'(0) = -y_0$$
$$z_1'(0) = 0$$
$$z_2'(0) = 1$$

Et donc :

$$1 = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0$$

$$-y_0 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1$$

donc :

$$\lambda = 1 \text{ et } \mu = -y_0$$

Ainsi :

$$\forall t \in I: z(t) = z_1(t) - y_0 z_2(t)$$

Donc, par la question précédente.

$$\forall t \in I: y(t) = -\frac{1}{z(t)} \frac{z'(t)}{z(t)} = -\frac{z_1'(t) - y_0 z_2'(t)}{z_1(t) - y_0 z_2(t)}$$

\* Synthèse :

Soit  $y = -\frac{z'}{z}$  définie sur la composante connexe  $I$  de  $0$  dans  $\{z \neq 0\}$  où

$$z = z_1 - y_0 z_2.$$

(On remarque que  $z(0) = 1$  donc  $z > 0$  sur  $I$ , ce qui est cohérent avec  $z = \exp(\dots)$ )

Par construction,  $z$  est solution de  $z'' - tz' + 2z = 0$  et donc :

$$z(0) = 1, z'(0) = -y_0$$

$$y(0) = -(-y_0) = y_0 \text{ et } \forall t \in I: y'(t) = -\frac{z''(t)}{z(t)} + \frac{z'(t)^2}{z(t)^2}$$

$$= 2 - t \frac{z'(t)}{z(t)} + \left( \frac{z'(t)}{z(t)} \right)^2$$

$$= 2 + ty(t) + y(t)^2$$

De plus,  $z$  est une sol<sup>n</sup> non nulle d'une E.D. de degré 2 donc  $z$  et  $z'$  ne s'annulent pas en même temps. Ainsi, si les bords de  $I$  sont fins, alors  $y$  explose en ces bords ce qui indique que c'est bien la solution maximale.