

$\mathcal{H}(U)$ est un anneau à pgcd non factoriel: digons 142, 235, 241, 245, (223) [Budin, Analyse réelle et complexe] IV 2

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $E_k: z \mapsto (1-z) \exp(z + \dots + \frac{z^k}{k}) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Unique zéro simple en 0.

lemme:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall |z| \leq 1, \quad |1 - E_k(z)| \leq |z|^{k+1}$$

Th:

Soit $U \subseteq \mathbb{C}$. Faire uniquement $U = \mathbb{C}$.

Soient $A \subseteq U$ une partie sans point d'accumulation dans U et $m: A \rightarrow \mathbb{N}^*$.

Alors:

$$\exists f \in \mathcal{H}(U) \text{ tq } Z(f) = A \text{ et } \forall \alpha \in A, \forall \alpha(f) = m(\alpha)$$

Cor: Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ connexe.

plus intéressant pour la leçon homomorphie

$\mathcal{H}(U)$ est un anneau à pgcd.

$$2) \mathcal{H}(U) = \text{Frac}(\mathcal{H}(U))$$

Par ailleurs, $\mathcal{H}(U)$ n'est pas factoriel.

preuve du lemme:

$$\text{On a: } E_k'(z) = -\exp(z + \dots + \frac{z^k}{k}) + (1-z)(1 + \dots + \frac{z^{k-1}}{k-1}) \exp(z + \dots + \frac{z^k}{k}) = -z^k \exp(z + \dots + \frac{z^k}{k})$$

$$\text{Or: } 1 - E_k(z) = - \int_{[0,z]} E_k'(w) dw \\ = - \int_0^1 z E_k'(tz) dt$$

$$\text{Donc: } |1 - E_k(z)| \leq \int_0^1 |z| |E_k'(tz)| dt \\ = |z| \int_0^1 t^k \exp(t|z| + \dots + \frac{t^k |z|^k}{k}) dt \\ \leq |z|^k \int_0^1 t^k \exp(t|z| + \dots + \frac{t^k |z|^k}{k}) dt \\ \leq |z|^k \int_0^1 \underbrace{\exp(t + \dots + \frac{t^k}{k})}_{= -E_k'(t)} dt \quad \text{car } |z| \leq 1 \\ = |z|^k (E_k(0) - E_k(1)) \\ = |z|^k$$

preuve du théorème:

$$K_n = \overline{D(a_n, r_n)}$$

Remarquons tout d'abord que U peut s'écrire comme $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ avec $\forall n, K_n \subseteq U$ compact.

Par hypothèse sur A , $\{A \cap K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap K_n)$ est au plus dénombrable. Si A est fini, alors

on peut prendre pour f un polynôme.

On suppose donc dans la suite $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ avec (a_n) une suite infinie injective.

* On commence par traiter le cas $U = \mathbb{C}$.

A n'a pas de point d'accumulation dans $\mathbb{C}$ donc, $\forall n: |A \cap \overline{D}(0, n)| < +\infty$.

Ainsi: $|A| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$. On prend $a_n \neq 0$ $\forall n$ qu'il faut à multiplier la fonction obtenue par z^{a_n} pour un certain a_n .

On note $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite construite en répétant chaque a_n $m(a_n)$ fois. On a également

$|z_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$. On note $r_n = |z_n|$.

Soit $(p_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall r > 0: \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n} < +\infty$. ($p_n = n-1$ convient toujours).

• d.l.g. $f(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$ a du sens et converge.

Soit $r > 0$:

Soit N tq $\forall n \geq N: r_n \geq 2r$.

On a: $\forall z \in D(0, r), \forall n \geq N: \left|\frac{z}{z_n}\right| \leq \frac{r}{r_n} \leq \frac{1}{2}$ donc, par le lemme: $|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)| \leq \left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n}$

Ainsi: $\forall n \geq N, \forall z \in D(0, r)$:

$$\begin{aligned} |\log(E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right))| &\leq H |1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)| \quad \text{par l'I.A.F. avec } H = \sup_{z \in D(0, 1/2)} |\log'(z)| (=2) \\ &\leq H \left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n} \end{aligned}$$

Donc, $\sum_{n \geq N} \log(E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right))$ converge uniformément vers une fonction holomorphe sur $D(0, r)$. (grâce à $\log$ et E_{p_n})

Par continuité de $\exp$: $\exp\left(\sum_{n \geq N} \log(E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right))\right) = \prod_{n \geq N} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$

Ainsi, $f(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$ définit bien une fonction holomorphe sur $D(0, r)$, ceci pour r quelconque et donc holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Par ailleurs, sur $D(0, r)$: $f(z) = \prod_{n=1}^{N-1} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right) \cdot \underbrace{\exp\left(\sum_{n \geq N} \log(E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right))\right)}_{\text{ne s'annule pas}}$

$$\begin{aligned} \text{Donc, } \forall a \in D(0, r): \quad V_a(f) &= \sum_{n=1}^{N-1} V_a(E_{p_n}\left(\frac{\cdot}{z_n}\right)) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} V_a(E_{p_n}\left(\frac{\cdot}{z_n}\right)) \quad \text{car pour } n \geq N, E_{p_n}\left(\frac{a}{z_n}\right) \neq 0. \\ f &= m(a) \quad \text{si } a \in A \\ &= 0 \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

Donc: f convient.

* On traite maintenant le cas $U \neq \mathbb{C}$.

On admet qu'on peut se ramener au cas où (a_n) est une suite bornée (nécessite de parler d'homographie de fonctions holomorphes sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$).

On construit la suite (z_n) de la même manière que dans le cas précédent.

U^c de un ferme du R-ou de dim finie C donc $\exists n, \exists \beta_n \in U^c$ tq $|z_n - \beta_n| = d(z_n, U^c)$

Soit $\varepsilon > 0$, supposons qu'il existe une suite de z_n tq $d(z_n, U^c) \geq \varepsilon$. On dispose alors d'une sous-suite (extraite) de valeurs dans $\{z \in U, |z| \leq R, d(z, U^c) \geq \varepsilon\}$, compact inclu dans U . Ainsi, (z_n) disposerait d'un point d'accumulation dans U : absurde.

Ainsi: $d_n = |z_n - \beta_n| = d(z_n, U^c) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

• d'lg $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{z_n - \beta_n}{z - \beta_n}\right)$ est bien def. et a du sens:

Soit $K \subseteq U$ compact $\exists a \in U, b \in U^c$ tq $d(K, U^c) = |a - b|$ et donc $d(K, U^c) = \varepsilon > 0$.

Ainsi: $\forall n \in \mathbb{N}: \left| \frac{z_n - \beta_n}{z - \beta_n} \right| \leq \frac{d_n}{\varepsilon} \leq \frac{1}{2}$ pour $n \gg 1$, donc: $\left| 1 - E_n\left(\frac{z_n - \beta_n}{z - \beta_n}\right) \right| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

On conclut alors de la même manière que dans le cas précédent.

preuve du cor:

1) Soit $f, g \in \mathcal{H}(U)$.

On note $A := Z(f) \cap Z(g)$ partie sans point d'accumulation dans U (par le th des zéros isolés car U connexe).

On pose $m: A \rightarrow \mathbb{N}^2$
 $\alpha \mapsto \min(V_\alpha(f), V_\alpha(g))$

Par le th: $\exists \delta \in \mathcal{H}(U)$ tq $Z(\delta) = A$ et $\forall \alpha \in A: V_\alpha(\delta) = m(\alpha)$.

Or: $h|f \text{ et } h|g \Leftrightarrow \forall \alpha \in U: V_\alpha(h) \leq \min(V_\alpha(f), V_\alpha(g))$

$\Leftrightarrow Z(h) \subseteq A$ et $\forall \alpha \in A: V_\alpha(h) \leq m(\alpha)$

$\Leftrightarrow \forall \alpha \in U: V_\alpha(h) \leq V_\alpha(\delta)$

$\Leftrightarrow h|\delta$

$\leadsto \delta = \text{pgcd}(f, g)$

• d'lg $\mathcal{H}(U)$ n'est pas factoriel.

On montre avec faiblesse, que les irréds de $\mathcal{H}(U)$ sont exactement les $X - z$ pour $z \in U$ (car f irréds. $\Rightarrow f$ a un unique zéro qui est simple).

Soit $(x_n) \in U^N$ injective sans pt d'accumulation dans U tq $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \beta \in U^c$ ($\beta = \infty$ si $U = \mathbb{C}$)

Par le th: $\exists f \in \mathcal{H}(U)$ tq $Z(f) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$

Ainsi, $d(f) = \infty$ donc f ne s'écrit pas comme un produit fini d'irréds.

2) Soit $h \in \mathcal{H}(U)$, on construit $f \in \mathcal{H}(U)$ tq $Z(f) = Z(h)$ avec la même ordre $\leadsto g = fh \in \mathcal{H}(U)$