

Références :

Cours d'algèbre, Daniel Perrin

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit q une forme quadratique sur E définie positive et f sa forme bilinéaire symétrique associée.

Déf. Le groupe orthogonal est

$$\mathcal{O}(q) = \{u \in GL(E) : \forall x, y \in E, f(u(x), u(y)) = f(x, y)\}.$$

C'est l'ensemble des isométries de E . On définit également

$$\mathcal{O}^+(q) = \{u \in \mathcal{O}(q) : \det(u) = 1\}.$$

Prop. Soit $u \in GL(E)$ tel que $u^2 = Id_E$. Alors il existe $E^+(u)$ et $E^-(u)$ tels que

$$(i) \quad E = E^+(u) \oplus E^-(u)$$

$$(ii) \quad u|_{E^+(u)} = Id_{E^+(u)} \text{ et } u|_{E^-(u)} = -Id_{E^-(u)}$$

Si $\dim(E^-(u)) = 1$, u est une **réflexion**.

Si $\dim(E^-(u)) = 2$, u est un **renversement**.

Théo. Le groupe $\mathcal{O}(q)$ est engendré par les réflexions. Plus précisément, si $u \in \mathcal{O}(q)$, u est produit d'au plus n réflexions.

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{O}(q)$. Posons

$$F_u = \{x \in E, u(x) = x\}$$

qui est un sous-espace vectoriel de E . On définit $p_u = n - \dim(F_u)$. Nous allons prouver que u est produit d'au plus p_u réflexions.

On raisonne par récurrence sur p_u .

- Si $p_u = 0$, alors $F_u = E$ donc $u = Id_E$. Par convention, Id_E est produit de 0 réflexion.

- Soit $p_u \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in F_u^\perp \setminus \{0\}$ et soit $y = u(x)$. On a que $x \neq y$ car $x \notin F_u$. Or, comme u stabilise F_u et comme u est une isométrie, on a que u stabilise $F_u^\perp$.

Supposons que, pour tout $x \in F_u$, $u(x) \in F_u$.

Montrons que, pour tout $y \in F_u^\perp$, $u(y) \in F_u^\perp$, c'est-à-dire que, pour tout $y \in F_u^\perp$ et pour tout $z \in F_u$, $f(u(y), z) = 0$.

Soit $y \in F_u^\perp$ et $z \in F_u$

$$f(u(y), z) = f(u(y), u(z)) = f(y, z) = 0$$

Ainsi, $y \in F_u^\perp$.

Montrons que $x - y \perp x + y$.

$$\begin{aligned} f(x - y, x + y) &= f(x, x) + f(x, y) - f(y, x) - f(y, y) \\ &= f(x, x) - f(u(x), u(x)) \\ &= f(x, x) - f(x, x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Comme $x - y \neq 0$, on peut écrire

$$E = \text{Vect}(x - y) \oplus (x - y)^\perp = E^- \oplus E^+.$$

On définit $\tau \in \mathcal{L}(E)$ par

$$\begin{cases} \tau|_{E^-} = -Id_{E^-} \\ \tau|_{E^+} = Id_{E^+} \end{cases}$$

Alors $\tau^2 = Id_E$ et $\dim(E^-) = 1$ donc τ est une réflexion. On a

$$y - x = \tau(x - y) = \tau(x) - \tau(y)$$

et

$$x + y = \tau(x + y) = \tau(x) + \tau(y) \text{ car } x + y \perp x - y.$$

On a donc en faisant la différence de ces deux égalités que $\tau(y) = x$ c'est-à-dire que $\tau(u(x)) = x$. Ainsi, $x \in F_{\tau u}$.

On sait que $x, y \in F_u^\perp$ donc $x - y \in F_u^\perp$. Ainsi, on a $F_u \subset (x - y)^\perp = E^+$. Par conséquent, si on prend $z \in F_u$, alors $\tau u(z) = \tau(z) = z$. On a donc montré que $F_u \subset F_{\tau u}$.

Cette inclusion est stricte puisque $x \in F_{\tau u} \setminus F_u$.

On a donc que $p_{\tau u} < p_u$. Pour appliquer l'hypothèse de récurrence, il reste à vérifier que τu est une isométrie. Or, comme u est une isométrie, il suffit de montrer que τ en est une.

Soit $x, y \in E$. On écrit $x = x^+ + x^-$ ($x^+ \in E^+$ et $x^- \in E^-$) et $y = y^+ + y^-$ ($y^+ \in E^+$ et $y^- \in E^-$). D'une part, on a

$$\begin{aligned} f(\tau(x), \tau(y)) &= f(x^+ - x^-, y^+ - y^-) \\ &= f(x^+, y^+) - f(x^+, y^-) - f(x^-, y^+) + f(x^-, y^-) \\ &= f(x^+, y^+) + f(x^-, y^-) \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x^+ + x^-, y^+ y^-) \\ &= f(x^+, y^+) + f(x^+, y^-) + f(x^-, y^+) + f(x^-, y^-) \\ &= f(x^+, y^+) + f(x^-, y^-) \end{aligned}$$

Ainsi, τ est une isométrie.

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à $p_{\tau u}$ et on obtient

$$\tau u = \tau_1 \dots \tau_r \text{ avec } \tau_i \text{ réflexions et } r \leq p_{\tau u} \leq p_u - 1$$

On obtient donc

$$u = \tau \tau_1 \dots \tau_r \text{ avec } r + 1 \leq p_u$$

□

Théo. Pour $n \geq 3$, $\mathcal{O}^+(q)$ est engendré par les renversements. Plus précisément, tout élément $u \in \mathcal{O}^+(q)$ est produit d'au plus n renversements.

Démonstration. (i) Si $u = \text{Id}_E$, alors par convention, u est produit de 0 renversement.

(ii) Si $n = 3$. Soit $u \in \mathcal{O}^+(q)$. Alors $u = \tau_1 \dots \tau_r$, avec $r \leq 3$ et τ_i sont des réflexions. Or le déterminant d'une réflexion est -1. Ainsi, on a nécessairement $u = \tau_1 \tau_2$.

On remarque que pour $n = 3$, si τ est une réflexion, alors $-\tau$ est un renversement.

Ainsi, en prenant, $u = (-\tau_1)(-\tau_2)$, on a que u est produit de deux renversements.

(iii) Si $n > 3$. Soit $u \in \mathcal{O}^+(q)$, alors on a $u = \tau_1 \dots \tau_{2p}$ avec $2p \leq n$. Il suffit de montrer le lemme suivant et on aura le résultat.

Lemme. Soit $n > 3$ et soit τ_1, τ_2 des réflexions, alors il existe des renversements σ_1, σ_2 tels que $\tau_1 \tau_2 = \sigma_1 \sigma_2$.

Démonstration. Soit H_1 et H_2 les hyperplans stabilisés par τ_1 et τ_2 . On a nécessairement $\dim(H_1 \cap H_2) \geq n - 2 \geq n - 3$. Ainsi, $H_1 \cap H_2$ va contenir un sous-espace V de dimension $n - 3$. Ainsi, $(\tau_1 \tau_2)|_V = \text{Id}_V$. On a que $\tau_1 \tau_2$ stabilise V et est une isométrie. On a donc $\tau_1 \tau_2(V^\perp) \subset (V^\perp)$. Or $\dim(V^\perp) = n - \dim(V) = 3$. D'après le cas $n = 3$, il existe $\tilde{\sigma}_1$ et $\tilde{\sigma}_2$ des renversements tels que $(\tau_1 \tau_2)|_{V^\perp} = (\tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_2)|_{V^\perp}$. On prolonge maintenant $\tilde{\sigma}_1$ et $\tilde{\sigma}_2$ par l'identité sur E et on obtient le résultat. □

□

Leçons possibles : 106 - 108 - 160 - 161 - 170 - 183