

* Théorème de Brouwer: (203, 204, 214, 215 (209, 253))

[Gannon-Toul: calcul différentiel] II 5 et 7

On note B^n la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$.

Alors:

Toute fonction $f: B^n \rightarrow B^n$ C^0 admet un point fixe.

preuve:

Supposons qu'une telle application f existe.

• d'q op $f \in C^1$:

B^n est compact donc, par Stone-Weierstrass, $\exists Q: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ polynomiale en les coordonnées tq:

$\|f - Q\|_\infty \leq \varepsilon$. Posons $\tilde{Q} := \frac{Q}{1+\varepsilon}$. $\forall x \in B^n$: $\|\tilde{Q}(x)\| \leq \frac{\|f(x)\| + \|f - Q\|_\infty}{1+\varepsilon} \leq \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon} = 1$. Donc: $\tilde{Q}: B^n \rightarrow B^n$.

De plus: $\|\tilde{Q} - f\|_\infty = \frac{\|Q - (1+\varepsilon)f\|_\infty}{1+\varepsilon} \leq \frac{\|Q - f\|_\infty + \varepsilon\|f\|_\infty}{1+\varepsilon} \leq \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} \leq 2\varepsilon$.

f est C^0 sans pt fixe de B^n est compacte donc: $m := \min_{x \in B^n} \|f(x) - x\| > 0$.

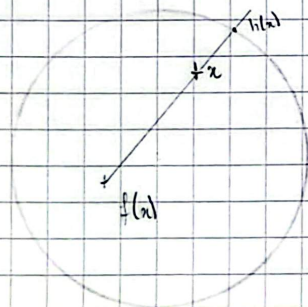
Alors: $\forall x \in B^n$: $\|\tilde{Q}(x) - x\| \geq \|f(x) - x\| - \|f(x) - \tilde{Q}(x)\| \geq m - 2\varepsilon > 0$ pour ε assez petit.

Donc, $\tilde{Q}$ n'a pas de point fixe.

Ainsi, quitte à remplacer f par $\tilde{Q}$, op: $f \in C^1$.

• d'q $\exists h: B^n \rightarrow S^{n-1}$ de classe C^1 tq $h|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}$.

Pour $x \in B^n$, on note $h(x)$ l'unique point d'intersection différent de $f(x)$ entre $[f(x), x]$ et S^{n-1} .



d'q $h(x)$ bien def: Soit $x \in B^n$, $\varphi(x, \lambda): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\lambda \mapsto \|f(x) + \lambda(x - f(x))\|^2 - 1 = \|f(x)\|^2 - 1 + 2\lambda \langle f(x), x - f(x) \rangle + \lambda^2 \|x - f(x)\|^2$$

$\varphi(x, \cdot)$ est polynôme de degré 2, de coeff dominant > 0 ; $\varphi(x, 0) = \|f(x)\|^2 - 1 \leq 0$

$\varphi(x, 1) = \|x\|^2 - 1 \leq 0$. Donc, $\varphi(x, \cdot)$ a une unique racine $\lambda(x) \geq 1$.

$$\leadsto h(x) = f(x) + \lambda(x)(x - f(x))$$

* On a clairement $h: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ et $h|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \text{id}$.

* dq h est $\mathcal{C}^1$. Il suffit de mg $\lambda: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$.

On note $\Delta(x)$ le discriminant de $\mathcal{P}(x, \lambda)$. $\Delta: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est clairement $\mathcal{C}^1$ et Δ valeurs > 0 car

$$\mathcal{P}(x, \lambda) \text{ a toujours 2 racines distinctes. Ainsi: } \lambda(x) = \frac{-2\langle f(x), x - f(x) \rangle + \sqrt{\Delta(x)}}{2\|x - f(x)\|^2} \text{ est } \mathcal{C}^1.$$

$\rightarrow \forall t \in [0, 1]$, on pose $h_t: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$
 $x \mapsto x + t(h(x) - x)$

* dq $h_t(\mathbb{B}^n)$ est ouvert $\subseteq \mathbb{B}^n$ et h_t induit un $\mathcal{C}^1$ difféo $\mathbb{B}^n \xrightarrow{h_t} h_t(\mathbb{B}^n)$ pour t assez petit: (*)

* dq h_t injective pour t assez petit:

$$\|h_t(x) - h_t(y)\| \geq (1-t)\|x-y\| - t\|h(x) - h(y)\| \geq (1-t)\|x-y\| - Ct\|x-y\| \text{ avec } C > 0 \text{ indep de } x \text{ et } y$$

grâce au TAF^h et la compacité de $\mathbb{B}^n$.

$$\text{Donc: } \|h_t(x) - h_t(y)\| \geq (1 - (1+C)t)\|x-y\| > 0 \text{ pour } t \ll 1.$$

$\leadsto h_t$ injective pour $t \in [0, \alpha]$ avec $\alpha > 0$.

* dq $Dh_t(x) \in GL^+(\mathbb{R}^n) \forall x \in \mathbb{B}^n$ pour t assez petit.

carce { $Dh_t(x) = I_n + t(Dh(x) - I_n)$, donc: $\|Dh_t(x) - I_n\| \leq Ct$ avec C indep. de x grâce à la $\mathcal{C}^1$ de Dh et la compacité de $\mathbb{B}^n$. Or, $GL^+(\mathbb{R}^n)$ est ouvert dans $M_n(\mathbb{R})$ donc, quitte à prendre α encore plus petit, on a bien: $\forall t \in [0, \alpha], \forall x \in \mathbb{B}^n: Dh_t(x) \in GL^+(\mathbb{R}^n)$.

* dq $h_t(\mathbb{B}^n) \subseteq \mathbb{B}^n$ pour $t \in [0, \alpha]$: car $h_t(\mathbb{B}^n) \subseteq \mathbb{B}^n$ et $h_t(\mathbb{B}^n)$ ouvert par inverse globale

~~$\forall x \in \mathbb{S}^{n-1}: h_t(x) = x + t(h(x) - x) = x$. Or h_t est injective donc: $\forall x \in \mathbb{B}^n: h_t(x) \notin \mathbb{S}^{n-1}$~~

~~et $h_t(x) \in \mathbb{B}^n$ par compacité de $\mathbb{B}^n$.~~

$\leadsto$ On peut donc appliquer le théorème d'inverse globale pour avoir (*): $\forall t \in [0, \alpha]$.

On pose maintenant $P: [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto \int_{\mathbb{B}^n} \det(Dh_t(x)) dx$ qui est un polynôme en t .

* dq $P(1) = 0$:

$\forall x \in \mathbb{B}^n: h_1(x) = h(x) \in \mathbb{S}^{n-1}$ donc $\|h(x)\|^2 = 1$. En dérivant, on trouve $\forall x \in \mathbb{B}^n, \forall h \in \mathbb{R}^n: \langle Dh(x)h, h(x) \rangle = 0$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{B}^n: Dh(x)(\mathbb{R}^n) \subseteq h(x)^\perp$ et donc $Dh(x) \notin GL(\mathbb{R}^n)$.

$$\leadsto P(1) = \int_{\mathbb{B}^n} 0 dx = 0.$$

(*)

• d/q P est constant non nul au voisinage de 0.

$$\begin{aligned} \text{Pour } t \in [0, \alpha], \text{ on a: } P(t) &= \int_{\hat{B}^n} \det(Dh_t(x)) dx \\ &= \int_{\hat{B}^n} |\det(Dh_t(x))| dx && \text{car } Dh_t(x) \in GL_n^+(\mathbb{R}) \\ &= \int_{H(\hat{B}^n)} 1 dx && \text{par CDR } \mathcal{C}^+ \\ &= \lambda(H(\hat{B}^n)) \end{aligned}$$

* d/q $H(\hat{B}^n) = \hat{B}^n$:

$\hat{B}^n$ est connexe, on va m/q $H(\hat{B}^n)$ est ouvert-fermé dans $\hat{B}^n$. On sait déjà, il ne reste plus qu'à montrer que c'est un fermé de $\hat{B}^n$.

Soit $(x_k) \in (\hat{B}^n)^{\mathbb{N}}$ tq $H(x_k) \rightarrow y \in \hat{B}^n$.

$\hat{B}^n$ est compact donc $\exists !: \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tq $x_{k_j} \rightarrow x \in \hat{B}^n$ par continuité de H : $H(x) = y$.

Or, H est ~~injective~~ sur $\hat{B}^n$ et $H|_{\partial \hat{B}^n} = \text{id}$ donc $x \notin \partial \hat{B}^n \leadsto x \in \hat{B}^n \leadsto y \in H(\hat{B}^n)$.

Donc, $H(\hat{B}^n)$ est ouvert-fermé non vide dans le connexe $\hat{B}^n \leadsto H(\hat{B}^n) = \hat{B}^n$.

Ainsi:

$$\forall t \in [0, \alpha]: P(t) = \lambda(H(\hat{B}^n)) = \lambda(\hat{B}^n) > 0.$$

P est un polynôme constant sur un intervalle non trivial donc P est constant sur $[0, \alpha]$.

$$\leadsto 0 = P(0) = \lambda(\hat{B}^n) > 0. \quad \text{!}$$