

Développements (plutôt analyse)

[Analyse Topologie] IV. ex 2

204

* lemme de la grenouille : d'après 223, 226. (203) [Terminale Sécate] 18

1) Si u est à valeurs dans un compact K (bornée dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ par ex.)
et $d(u_n, u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, alors : $\text{adh}(u)$ est connexe. (non vide)

2) Si $f: [0,1] \rightarrow [0,1] \subset \mathbb{R}$ et $u \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ def par $\begin{cases} u_0 \in [0,1] \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$, alors :

u converge $\Leftrightarrow |u_{n+1} - u_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

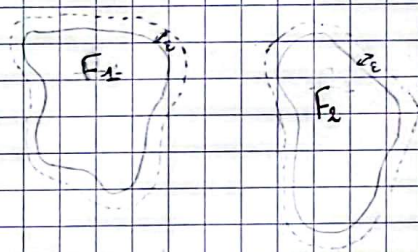
3) Il n'existe pas de fonction continue $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pour laquelle on ait
 $\cos(\alpha \sin t) = f(\cos(\alpha t))$ avec $\alpha > 0$.

4) Si $f: [0,1] \rightarrow [0,1] \subset \mathbb{R}$ et $u \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ def par $\begin{cases} u_0 \in [0,1] \\ u_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(u_k) \end{cases}$, alors
 u converge vers un point fixe de f .

preuve :

1) Notons $U = \text{adh}(u)$

Supposons $U = F_1 \cup F_2$ avec F_1 et F_2 deux fermés non vides



K est un compact métrique et F_1 et F_2 y sont fermés donc compacts et
donc $d := d(F_1, F_2) > 0$. Posons $\varepsilon = \frac{d}{3}$ et $\Lambda := \{x \in K, d(x, F_1 \cup F_2) \geq \varepsilon\}$

Λ est fermé dans K donc compact

Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $n \geq N_0 \Rightarrow d(u_n, u) \leq \varepsilon$

Soit $N \geq N_0$

$F_1 \subseteq U = \text{adh}(u)$ et F_1 non vide donc $\exists n_1 \geq N, d(u_{n_1}, F_1) \leq \varepsilon$

De même, $\exists n_2 \geq n_1, d(u_{n_2}, F_2) \leq \varepsilon$

Soit alors $s = \max \{k \in [n_1; n_2]; d(u_k, F_1) \leq \varepsilon\} \in [n_1; n_2 - 1]$

On a alors : $d(u_{n+1}, F_1) \geq \varepsilon$ (*)

Par ailleurs, comme F_1 et F_2 compacts, $\exists p_1, p_2 \in F_1 \times F_2$ | $\begin{cases} d(u_{n+1}, p_1) = d(u_{n+1}, F_1) \\ d(u_{n+1}, p_2) = d(u_{n+1}, F_2) \end{cases}$

$$\text{Et donc } \delta \varepsilon = d \leq d(f_1; f_2) \leq \underbrace{d(f_1; u_n)}_{\leq \varepsilon \text{ par d.d. des}} + \underbrace{d(u_n; f_2)}_{\leq \varepsilon \text{ car } s \geq N_0} \leq d(u_n; f_2) + 2\varepsilon$$

$$\leadsto \varepsilon \leq d(u_n; f_2) = d(u_n, f_2)$$

avec (4), on trouve : $d(u_n, f_1 \cup f_2) \geq \varepsilon$, i.e. : $u_n \notin \Lambda$.

Donc $\forall N \geq N_0, \exists s \geq N, u_s \in \Lambda$

Donc $\exists \ell: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tq $\forall n, u_{\ell(n)} \in \Lambda$.

Or, Λ compact métrique, donc, $(u_{\ell(n)})$ a une v.a. dans Λ .

Ainsi $\text{adh}(\Lambda) \cap \Lambda \neq \emptyset$

i.e. $\bigcup \{ \alpha \in \mathbb{N}, d(\alpha, \Lambda) \geq \varepsilon \} \neq \emptyset$: absurde car $\varepsilon > 0$.

Donc $\boxed{\Lambda \text{ connexe}}$

2) $\Rightarrow$ ok.

⊖ supposons $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, par 1), on a $\text{adh}(\Lambda)$ connexe

de +, u bornée donc $\text{adh}(\Lambda)$ compact

$$\leadsto \text{adh}(\Lambda) = [0, b] \text{ avec } 0 \leq a \leq b \leq 1$$

Soit $f \in [0, b] = \text{adh}(\Lambda)$. $\exists \ell: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $u_{\ell(n)} \rightarrow f$

$$u_{\ell(n+1)} - u_{\ell(n)} \rightarrow 0 \text{ donc } u_{\ell(n)} \rightarrow f$$

$$\text{Or } u_{\ell(n+1)} = f(u_{\ell(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(f)$$
 par $\mathcal{C}^0$ de f

$$\leadsto f(f) = f$$

Supposons $a < b$: $\exists k$ tq $u_k \in [0, b]$, par ce qu'on vient de faire,

$$u_n = u_k \quad \forall n \geq k \leadsto \text{adh}(\Lambda) = \{u_k\} \neq [0, b] \quad \text{f}$$

$\leadsto a = b$ et u a une unique v.a.

$\leadsto u$ converge.

$\alpha > 0$.

$$3) \text{ TAF: } 0 \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{n+1 - n}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

De plus $\sqrt{n} \rightarrow \infty$ donc $\{\cos(\alpha\sqrt{n}), n \geq 0\}$ dense dans $[0; 1]$

Ence, et $f(\cos(\alpha\sqrt{n})) = \cos(\alpha(\sqrt{n+1}))$, $\forall n \geq 0$, alors $f(\text{Dens}) \subseteq [0; 1]$

Or $|\cos(\alpha\sqrt{n+1}) - \cos(\alpha\sqrt{n})| \rightarrow 0$ (ue de $\cos$) donc, par 2): $(\cos(\alpha\sqrt{n}))$ converge

$\leadsto$ contradiction la densité de $\{\cos(\alpha\sqrt{n}), n \geq 0\}$: f

$$(c) \quad u_{n+1} = \frac{f(n) + \dots + f(n)}{n+1} = \frac{n}{n+1} \left(\underbrace{f(n) + \dots + f(n)}_n \right) + \frac{f(n+1)}{n+1} = \frac{n}{n+1} u_n + \frac{f(n+1)}{n+1} \quad (1)$$

En particulier, comme f borne : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ donc $\text{ad}(f) = [0, b]$

Soit $f \in C([a, b])$. Supposons $f(p) < p$. $\exists \varepsilon > 0$ tq $|x - p| < \varepsilon \Rightarrow f(x) < x$.

Notons $A_1, \dots, A_i, \dots$ les cordes d'arcs n-1 q-1 $\cup$ $\{1\}$ & e

$d_n, |u_n - v| \leq \varepsilon = \bigcup_{i \geq 1} A_i$, $A_i \subseteq A_{i+1}$ de $\forall i: A_i$ Intervalle d'entiers.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $f(n) < u_n$ donc $u_{n+1} < u_n$ par (1) (2)

Or $f \in \text{adhlul}$ done $\bigcup_{\beta \in A} f_{\beta}$ inf.

Answer, so the answer is no for k, on a formula $A_k = \{n_1, n_2, \dots\}$ such that $A \models A_k$

n_0 et converge, forcément vers P .

Por Cesàro + l^o de f: $\underbrace{f(u_0) + \dots + f(u_n)}_{n+1} \rightarrow p$

$\sim 0 \text{ fll} = 1$: absurde

Donc les A₁ sont en ab. inf.

Done, $\forall n, \exists k$ tq $i \geq k \Rightarrow A \subseteq q_n, n=1, \dots$

Sol. $\forall n \geq N \rightarrow |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{\epsilon}{2}$

Sol: $k \leq k_0 \Rightarrow A_k \in M_{n-1}$

Norms $A_k = [a_k, b_k]$ $N \leq a_k \leq b_k$.

Per (2): $u_{b_k} < u_{b_k}$, or $u_{b_k} - \epsilon \leq u_{b_k}$ or $u_{b_k} - \epsilon > u_{b_k}$ per def. di b_k di A.

Done: $u_{k+1} < l - \varepsilon$.

Norms $\| \cdot \|_2 = \max \{ |q| \in [b_{k+1}; d_{k+1}], uq \leq p - \varepsilon \} \leq d_{k+1} - 1$

On a $\exists N$ donc $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{\epsilon}{2}$ donc $l - \epsilon \leq u_{n+1} \leq l - \frac{\epsilon}{2}$

On en déduit: $8+1 = 9$

On a suite : $1 - \frac{2}{2} \geq u_n \geq u_{n+1} \geq \dots \geq u_{n+1}$

Done: $\forall q \in [u_{k+1}, u_k]$: $uq \leq p - \frac{\varepsilon}{2}$

En l'écart: $t_q \geq b_{\text{min}}$: $u_q \leq \frac{P - \varepsilon}{2}$, contradict $P \in \text{adh}(W)$ $\frac{1}{2}$

done full.

$$\mathcal{D}_\infty \cap \mathcal{M}: f(V) \leq 1. \quad \leadsto \quad f(V) = 1. \quad (3)$$

81 $a < b$, also $\exists \eta \quad \forall n \in [0, b]$ dann $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} = 0$ (3) $\sim \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$