

* Groupe des isométries du cube: 101, 104, 105, 161, 191, (108, 181)

[NXL Geométrie], XII.3.5

des groupes d'isométries du cube sont:

$$I_s^+(\mathcal{C}) \cong \mathcal{S}_4 \quad \text{et} \quad I_b(\mathcal{C}) = \mathcal{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

preuve:

Soit $g \in I_s^+(\mathcal{C})$:

Soient M et N deux sommets opposés de $\mathcal{C}$. On a $MN = \text{diam}(\mathcal{C})$ donc

$g(M)g(N) = MN = \text{diam}(\mathcal{C})$. Ainsi, $g(M)$ et $g(N)$ sont également deux sommets opposés de $\mathcal{C}$.

Ensuite, comme g préserve les barycentres, on a: $g(M; N) = [g(M); g(N)]$.

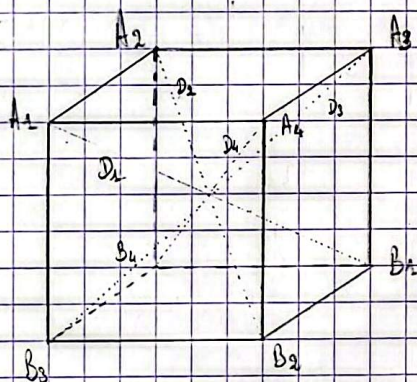
On a donc montré que g envoie les grandes diagonales sur des grandes diagonales car elles représentent les longueurs maximales au sein du cube.

Notons alors $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ l'ensemble des grandes diagonales du cube.

Par ce qu'on vient de dire, g induit une permutation de $\mathcal{D}$.

On a donc deux actions de groupes sur $\mathcal{D}$:

$$\Psi: I_s^+(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathcal{D}) \cong \mathcal{S}_4 \quad \text{et sa restriction:} \quad \varphi: I_s^+(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathcal{D}) \cong \mathcal{S}_4$$



rotations pour la suite

* clq l'action $I_s^+(\mathcal{C}) \curvearrowright \mathcal{D}$ est fidèle.

Soit $g \in \ker \ell$:

g préserve $[A_1 B_1]$ donc préserve le couple $\{A_1; B_1\}$. Ainsi: $g(A_1) = A_1$ ou B_1 .

• Supposons $g(A_1) = A_1$:

De la même manière que pour A_1 , on a: $g(A_2) = A_2$ ou B_2 .

Or: $g(A_2)A_1 = g(A_2)g(A_1) = A_2A_1 \neq B_2A_1$, donc $g(A_2) \neq B_2$.

Ainsi: $g(A_2) = A_2$.

De même: $g(A_4) = A_4$ et $g(B_3) = B_3$.

Or, (A_1, A_2, A_4, B_3) est un repère affine de $\mathbb{R}^3$ donc: $g = \text{id}$.

• Supposons $g(A_1) = B_1$:

Soit s_0 la symétrie centrale par rapport au barycentre O de $\mathcal{C}$.

s_0 préserve les éléments de D (i.e. $s_0 \in \ker \Psi$) et donc $s_0 g$ aussi.

Or, $s_0 g(A_1) = s_0(B_1) = A_1$ donc, par le cas précédent:

$$s_0 g = \text{id}$$

i.e. $g = s_0$: absurde car $s_0 \notin \text{Is}^+(\mathcal{C})$.

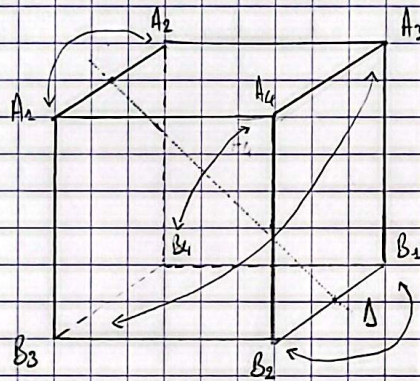
(On a en fait montré $\ker \Psi = \{\text{id}, s_0\}$ et donc $\ker \ell = (\ker \Psi) \cap \text{Is}^+(\mathcal{C}) = \{\text{id}\}$)

* clq ℓ est surjectif:

On sait que $\mathcal{S}_4$ est engendré par les transpositions donc il nous suffit de montrer que $(ij) \in \text{Im}(\ell)$ pour $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Soit Δ la droite passant par les milieux de $[A_i, A_j]$ et $[B_i, B_j]$, et g le retournement d'axe Δ .

On a: $g(A_i) = A_j$, $g(B_i) = B_j$, $g(A_k) = B_k$ pour $k \notin \{i, j\}$ et g est involutif donc g correspond bien à la transposition (ij) .



action de g

Ainsi, ℓ est un isomorphisme et donc: $\text{Is}^+(\mathcal{C}) \cong \mathcal{S}_4$

On a donc la suite exacte suivante:

$$1 \rightarrow \mathcal{S}_4 \rightarrow \text{Is}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\det} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 1$$

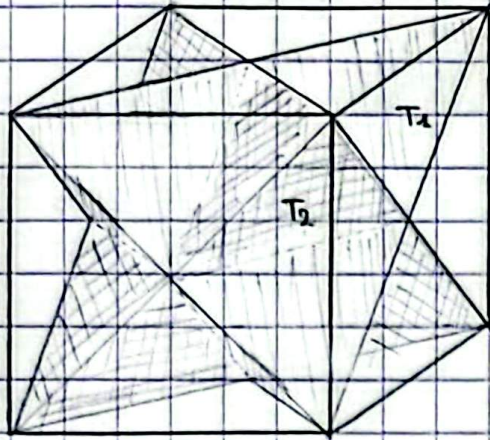
Cette suite exacte courte est surdue grâce à la section $s: \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \text{Is}(\mathcal{C})$, et $\mathbb{Z} \mapsto s_0$

donc: $\text{Is}(\mathcal{C}) \cong \mathcal{S}_4 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Or, s_0 commute avec tout le monde dans $\text{Is}(\mathcal{C})$ et donc:

$$\text{Is}(\mathcal{C}) \cong \mathcal{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

rq: On peut voir géométriquement la s.e.c. si on connaît le groupe d'isométries du tétraèdre.



On peut inscrire deux tétraèdres T_1 et T_2 dans C dont les sommets sont tous distincts, et c'est les deux seules manières de faire.

Le groupe $Is(C)$ agit sur la paire $\{T_1, T_2\}$ donc on dispose d'un morphisme $\alpha: Is(C) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, qui est surjectif car une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ autour de (Oz) échange T_1 et T_2 . Les éléments du noyau de α stabilisent T_1 (et T_2) donc on a une injection $ker(\alpha) \hookrightarrow Is(T_1)$ et on vérifie à la main qu'elle est également surjective.

On a donc la s.e.c. $1 \rightarrow Is(T) \rightarrow Is(C) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 1$ et on conclut de la même manière qu'avant.