

* Suite de polygones: leçons 102, 150, 152, 153, 191, 226 [Caldiero: Algèbre I], I.3.4

Soit P un n -gone du plan complexe que l'on assimile au n -uplet $(z_i) \in \mathbb{C}^n$ du affines de ses sommets ordonnés. Pour $a, b > 0$ tq $a+b=1$, on notera $F_{a,b}(P)$ le polygone (z'_i) construit en prenant les barycentres pondérés de deux sommets consécutifs: $\forall i \in \{1, n-1\}: z'_i = az_i + bz_{i+1}$ et $z'_n = az_n + bz_1$.

1) Soit (P_k) la suite de n -gones définie par $P_0 = P$ et $P_{k+1} = F_{a,b}(P_k)$.

Alors, (P_k) tend vers l'isobarycentre G de P .

2) de résultat tient toujours si on a $P_{k+1} = F_{a_k, b_k}(P_k)$ avec $a_k, b_k > 0$, $a_k + b_k = 1$ et $\sum a_k b_k = +\infty$.

preuve:

1) * clq P et $F_{a,b}(P)$ ont le même isobarycentre:

Il nous suffit de mg $\sum_{i=1}^n z'_i = \sum_{i=1}^n z_i$

$$\begin{aligned} \text{Or: } \sum_{i=1}^n z'_i &= \sum_{i=1}^{n-1} (az_i + bz_{i+1}) + az_n + bz_1 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} az_i + az_n + \sum_{i=2}^n bz_i + bz_1 \\ &= (a+b) \left(\sum_{i=1}^n z_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n z_i \end{aligned}$$

On en déduit plus généralement que $\forall k, P_k$ a G pour isobarycentre. (*)
Notons maintenant $Z := \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ et $Z' := \begin{pmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_n \end{pmatrix}$ et posons $C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Par définition des z'_i , on a $Z' = aZ + bCZ = C_{a,b}Z$ où $C_{a,b} = aI_n + bC$

Plus généralement, si on pose $Z_0 = Z$ et $Z_{k+1} = C_{a,b}Z_k$, alors les coordonnées de Z_k sont les affines des sommets de P_k . En particulier: $Z_k = (C_{a,b})^k Z$

* Étudions la matrice C :

C est la transposée d'une matrice compagnon et donc $\chi_C = X^{n-1} - 1$.

χ_C est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ et donc C est diagonalisable et ses valeurs propres sont simples et sont exactement les éléments de

$$U_n := \{ \omega^k = e^{\frac{2\pi i k}{n}}, \forall k \in \{0, n-1\} \}$$

Ainsi, $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $C = P \text{diag}(\omega_0, \dots, \omega_{n-1}) P^{-1}$

Donc: $C_{a,b} = P \text{diag}(a+b\omega_0, \dots, a+b\omega_{n-1}) P^{-1}$

Notons $\pi_0, \dots, \pi_{n-1}$ les projections spectrales associées aux $a+bu^k$ (pour rappel, si u est diagonalisable et $E_1, \dots, E_m$ sont ses sous-espaces propres, la projection spectrale associée à la valeur propre λ_i est la projection sur E_i // à $\bigoplus_{j \neq i} E_j$).

On a alors:

$$C_{a,b} = \sum_{i=0}^{n-1} (a+bu^i) \pi_i$$

(rq: on a en fait $\pi_i = P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$)

Par ailleurs, $\forall i, j$ on a $\pi_i \pi_j = 0$ et $\pi_i^2 = \pi_i$ donc:

$$\forall k \geq 0: C_{a,b}^k = \sum_{i=0}^{n-1} (a+bu^i)^k \pi_i$$

* d/q $C_{a,b}^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \pi_0$:

Soit $u \in \mathbb{D} \setminus \{1\}$, on a: $|a+bu^k|^2 = a^2 + 2ab \operatorname{Re}(u^k) + b^2 |u^k|^2$

$$= a^2 + b^2 + 2ab \operatorname{Re}(u^k) \quad \text{car } |u^k| = 1$$

$$= (a+b)^2 - 2ab + 2ab \operatorname{Re}(u^k)$$

$$= 1 - 2ab(1 - \operatorname{Re}(u^k))$$

Or, $u^k \in \mathbb{D} \setminus \{1\}$ et donc $\operatorname{Re}(u^k) \in [-1, 1]$, ainsi:

$$|a+bu^k|^2 = 1 - 2ab(1 - \operatorname{Re}(u^k))$$

$$< 1$$

$$\text{Donc: } (a+bu^k)^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

De plus, $u^0 = 1$ donc $a+bu^0 = a+b = 1$

Ainsi:

$$C_{a,b}^k = \sum_{i=0}^{n-1} (a+bu^i)^k \pi_i \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \pi_0$$

Par ailleurs, π_0 est la projection spectrale sur le sous-espace associé à $a+b=1$. Or, ce sous-espace est de dimension 1 et on a:

$$C_{a,b} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{On en déduit: } \operatorname{Im}(\pi_0) = \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi:

$$\forall k: (C_{a,b})^k z \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \pi_0 z = \begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix} \quad \text{ou } z \in \mathbb{C}$$

Or, par continuité de l'isobarycentre d'un n -gone (c'est le sommet dont l'affixe est la moyenne des affixes des sommets du n -gone) et par (*), on sait que le n -gone représenté par $\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$ a le même isobarycentre que P .

Ainsi, $z = z_0$ l'affixe de G , ce qui permet de conclure.

2) Ce qui change par rapport à la question précédente, c'est qu'on a :

$$Z_{k+1} = C_k U_k Z_k = (a_k I_n + b_k C) Z_k$$

Or, $\forall k$: $C_k U_k = P \operatorname{diag}(a_k + b_k u_1, \dots, a_k + b_k u_n) P^{-1}$ et donc :

$$Z_k = C_k U_{k-1} \dots C_0 U_0 Z$$

$$= P \operatorname{diag}((a_0 + b_0 u_1) \dots (a_{k-1} + b_{k-1} u_1), \dots, (a_0 + b_0 u_n) \dots (a_{k-1} + b_{k-1} u_n)) P^{-1} Z$$

$$\text{On a : } (a_0 + b_0 u_1) \dots (a_{k-1} + b_{k-1} u_1) = (a_0 + b_0) \dots (a_{k-1} + b_{k-1}) \\ = 1$$

De plus, pour $k \in \mathbb{N}^{*}$:

$$(a_0 + b_0 u_1) \dots (a_{k-1} + b_{k-1} u_1)^2 = \prod_{j=0}^{k-1} [1 - 2a_j b_j (1 - \operatorname{Re}(u_1))] \geq 0$$

Supposons que ce produit soit non nul pour tous les $k \in \mathbb{N}^{*}$ (ce qui est toujours le cas si $u_1 \neq -1$)

$$\text{On a alors : } \ln |(a_0 + b_0 u_1) \dots (a_{k-1} + b_{k-1} u_1)|^2 = \sum_{j=0}^{k-1} \ln [1 - 2a_j b_j (1 - \operatorname{Re}(u_1))]$$

Par hypothèse, $\sum_{j=0}^{+\infty} a_j b_j = +\infty$ et donc $a_j b_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$.

$$\text{Ainsi, } \ln [1 - 2a_j b_j (1 - \operatorname{Re}(u_1))] \underset{j \rightarrow +\infty}{\sim} -2a_j b_j (1 - \operatorname{Re}(u_1)) < 0$$

Donc, $\sum_{j=0}^{+\infty} \ln [1 - 2a_j b_j (1 - \operatorname{Re}(u_1))]$ a la même nature que

$$\sum_{j=0}^{+\infty} -2a_j b_j (1 - \operatorname{Re}(u_1)) = \underbrace{-2(1 - \operatorname{Re}(u_1))}_{< 0} \underbrace{\sum_{j=0}^{+\infty} a_j b_j}_{\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} -\infty$$

$$\text{Ainsi : } (a_0 + b_0 u_1) \dots (a_{k-1} + b_{k-1} u_1) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

Donc :

$$Z_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} P \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} P^{-1} Z = \Pi_0 Z \text{ le projecteur spectral associé à } 1 \text{ par } C_0$$

On conclut alors exactement de la même manière que dans la 1)