

* théorème taubérien d'Hardy-Littlewood: leçons 209, 223, 224, 230, 241, 243

[Titchmarsh] VII 51

Soit (a_n) une suite de réels positifs. Supposons $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x}$ ($\Rightarrow$ rayon de cv = 1).

Alors:

$$s_n := \sum_{k=0}^n a_k \sim_{n \rightarrow \infty} n.$$

preuve:

On commence par essayer de donner une preuve naïve.

$$\forall x \in]0,1[: f(x) \geq \sum_{k=0}^n a_k x^k \geq s_n x^n$$

Et donc, en prenant $\alpha = e^{-\frac{1}{n}}$: $en e^{-\frac{1}{n}} \leq f(e^{-\frac{1}{n}})$ $\forall n$

Or, $e^{-\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ donc $f(e^{-\frac{1}{n}}) \sim \frac{1}{1 - e^{-\frac{1}{n}}} \sim n$ (taux d'accroissement de en en 0).

Ainsi, $\forall A > 1$: $en \leq Aen$ après et donc: $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{en}{n} \leq e$ (on voudrait 1 à la place)

Par ailleurs, $\forall n \in \mathbb{N}$: $(1-\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} sk \alpha^k = s_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (s_k - s_{k-1}) \alpha^k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \alpha^k = f(\alpha)$

Donc: $\forall n \in \mathbb{N}$: $f(n) \leq (1-\alpha) s_n \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k + (1-\alpha) \sum_{k=n}^{\infty} sk \alpha^k$
 $\leq s_n + (1-\alpha) \sum_{k=n}^{\infty} Aek \alpha^k$ pour $A > 1$ fixé et n assez grand. (indép. de α).

$$\text{Or, } (1-\alpha) \sum_{k=n}^{\infty} k \alpha^k = n\alpha^n + \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha^k = n\alpha^n + \frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

Et donc, après, $\forall n \in \mathbb{N}$: $(1-\alpha) f(n) \leq (1-\alpha) s_n + Aen(1-\alpha)\alpha^n + Aen\alpha^{n+1}$

En appliquant cela avec $\alpha = e^{-\frac{\lambda}{n}}$ pour un $\lambda \geq 1$ fixé et en faisant tendre $n \rightarrow \infty$, on trouve:

$$1 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}) s_n}_{= \lambda \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n}} + Ae \lambda e^{-\lambda} + Ae e^{-\lambda}$$

$$\text{Donc: } \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n} \geq \frac{1}{\lambda} - Ae e^{-\lambda} (1 + \frac{1}{\lambda}) \sim \frac{1}{\lambda}$$

On en déduit: $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n} > 0$. (on voudrait ≥ 1).

On va montrer que $(1-\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n g(\alpha^n) =: E(g) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 1} \int_0^1 g(t) dt$ pour $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ assez régulière

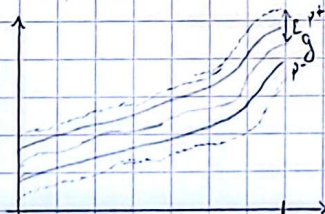
• Pour g polynomiale:

Par linéarité de E_n et de $\int$, il suffit de montrer le résultat par des monômes

$$\text{Or: } E_n(x^k) = (1-\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n (k+1) \alpha^{k+1} = (1-\alpha) f(k+1) \sim \frac{1-\alpha}{1-\alpha^{k+1}} = \frac{1}{1-\alpha^k} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 1} \frac{1}{k+1} = \int_0^1 t^k dt$$

• Pour g continue: Soit $\varepsilon > 0$.

Par le théorème d'approximation de Weierstraß, $\exists P^-, P^+ \in \mathbb{R}[X]$ tq $g - \varepsilon \leq P^- \leq g \leq P^+ \leq g + \varepsilon$ (P^- approche $g - \frac{\varepsilon}{2}$ et P^+ approche $g + \frac{\varepsilon}{2}$):



On a donc, par positivité des a_n :

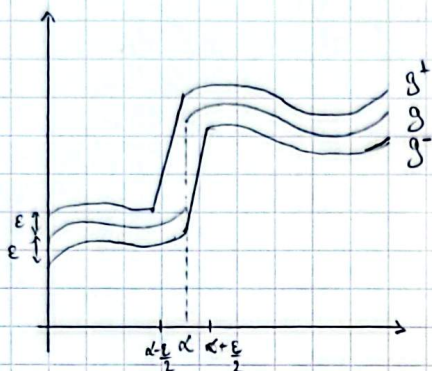
$$\int_0^1 g - \varepsilon \leq \int_0^1 p^- = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(p^-) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(g) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(g) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(p^+) = \int_0^1 p^+ \leq \int_0^1 g + \varepsilon.$$

En faisant tendre $\varepsilon \rightarrow 0$, on trouve: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(g) = \int_0^1 g$

• Pour g posséder une discontinuité de la 1^{re} espèce.

Soit $\alpha \in]0, 1[$. On suppose $g \in C^0([0, 1] \setminus \{\alpha\})$ et g possède des limites à gauche et à droite en α . Soit $\varepsilon > 0$.

On peut trouver $g^-, g^+ \in C^0([0, 1])$ tq $g^- \leq g \leq g^+$ et $g - \varepsilon \leq g^- \leq g \leq g^+ \leq g + \varepsilon$ en dehors de $I := [\alpha - \frac{\varepsilon}{2}, \alpha + \frac{\varepsilon}{2}]$.



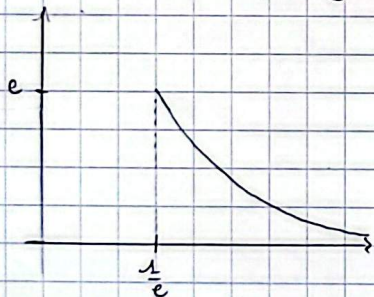
$$* C \leq \|g\|_\infty + \varepsilon$$

Soit $C := \max(\|g\|_\infty, \|g^+\|_\infty, \|g^-\|_\infty)$, on a:

$$\int_0^1 g - \varepsilon(1 + 2C) \leq \int_{\mathbb{R}} g - \varepsilon(1 + 2C) \leq \int_{\mathbb{R}} g^- - \varepsilon C \leq \int_0^1 g^- \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(g) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(g) \leq \dots \leq \int_0^1 g + \varepsilon(1 + 2C)$$

de résultat tombe encore en faisant $\varepsilon \rightarrow 0$.

• On applique le résultat à g def par $g(t) = 0$ pour $t < \frac{1}{e}$ et $g(t) = \frac{1}{t}$ pour $t \geq \frac{1}{e}$.



$$\text{On a: } \int_0^1 g = \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{t} dt = \ln(1) - \ln\left(\frac{1}{e}\right) = 1.$$

$$\text{Soit } x^n \in]0, 1[: \text{ On a: } \begin{cases} g(x^n) = 0 & \text{si } x^n < \frac{1}{e} \\ = \frac{1}{x^n} & \text{si } x^n \geq \frac{1}{e}. \end{cases}$$

$$\text{Or, } x^n \geq \frac{1}{e} \Leftrightarrow n \ln(x) \geq -1 \Leftrightarrow n \leq \frac{-1}{\ln(x)} \Leftrightarrow n \leq \left\lfloor \frac{-1}{\ln(x)} \right\rfloor$$

Answer: $E(g) = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{1}{1-\alpha} \rfloor} \alpha \alpha^n \times \frac{1}{\alpha^n} = s_{\lfloor \frac{1}{1-\alpha} \rfloor} = 1$ donc: $(1-\alpha) s_{\lfloor \frac{1}{1-\alpha} \rfloor} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 1^-} 1$.

En prenant $\alpha = e^{-\frac{1}{N}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1$, on trouve: $\underbrace{(1 - e^{-\frac{1}{N}})}_{\sim \frac{1}{N}} s_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1$ et donc: $s_N \sim N$.