

* Morphismes continus $(\mathbb{R}^1, x) \rightarrow (Gh(\mathbb{R}), x)$: démons 102, 106, 152, 155, 156 (158) [FGN, Algèbre 2, Vues argumentées] IV. 23

Soit $Q: (\mathbb{R}^1, x) \rightarrow (Gh(\mathbb{R}), x)$ un morphisme de groupe continu.

Alors:

$$\exists Q \in Gh(\mathbb{R}), \exists r \in \mathbb{N}, \exists k_i: \rightarrow k_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ tq: } \forall t \in \mathbb{R}, Q(e^{it}) = Q \begin{pmatrix} R_{k_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & R_{k_r t} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

admettre que $Q(e^{it}) = e^{itA}$

$$\text{ou } R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

démonstration:

Si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sont semblables sur $\mathbb{C}$, alors elles sont semblables sur $\mathbb{R}$ (peut être un peu prouvée le résultat)

preuve du lemme:

Par hyp., $\exists P \in Gh(\mathbb{C})$ tq $PA = BP$

On écrit $P = P_1 + iP_2$ avec $P_1, P_2 \in M_n(\mathbb{R})$. Par identification des coefficients, on a:

$$\forall t \in \mathbb{R}, P(A - B)(t) \text{ où } P(t) = P_1 + iP_2$$

Prenons $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f est polynomiale donc on peut voir f comme un polynôme

$f \in \mathbb{R}[X]$. Or, $f(t) = \det(P_1 + iP_2) \neq 0$ dans $\mathbb{C}$ et donc $f \neq 0$. En particulier, $\exists t \in \mathbb{R}$ tq $f(t) \neq 0$

Ainsi: $P(t) \in Gh(\mathbb{R})$ et on a $P(A) = B P(t)$.

preuve du théorème:

Soit Q un tel morphisme continu

Prenons $g: (\mathbb{R}^1, x) \rightarrow (Gh(\mathbb{R}), x)$ morphisme de groupes $\mathbb{C}^\infty$.

• étape 1: ilq $\exists A \in M_n(\mathbb{R})$, $\forall t \in \mathbb{R}: g(t) = e^{itA}$

$$\text{On a: } \forall s, t \in \mathbb{R}: g(st) = g(s)g(t) \quad (*)$$

Commençons par montrer que g est $\mathbb{C}^\infty$:

En intégrant (*) par rapport à s , on trouve: $\forall t \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}: \int_0^u g(st) ds = \left(\int_0^u g(s) ds \right) g(t)$

En notant $G: \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$, on a: $\forall t, u \in \mathbb{R}: G(t+u) - G(t) = G(u)g(t)$

Or, par le théorème fond de l'intégrale, G est $\mathbb{C}^1$ et $\frac{1}{u} G(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} g(0) = I_n \in Gh(\mathbb{R})$

Or, $Gh(\mathbb{R})$ est fermé et donc, $\exists u_0 > 0$ tq $G(u) \in Gh(\mathbb{R})$

Dev. Alg. 8.

Alors: $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = G(tu_0)^{-1} (G(t+u_0) - G(t))$

Donc: g est bien $\mathcal{C}^1$.

On dérive (*) par rapport à t et on trouve alors: $\forall s, t \in \mathbb{R}: g'(s+t) = g(s)g'(t)$.

En particulier: $\forall s \in \mathbb{R}: g'(s) = g(s)g'(0)$.

Posons $A := g'(0) \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ et $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ tel que: $\forall t \in \mathbb{R}: h(t) = g'(t)e^{-tA} - g(t)g'(0)e^{-tA}$
 $t \mapsto g(t)e^{-tA}$
 $= g(t)e^{-tA} - g(t)e^{-tA} = 0$

Ainsi, h est constante et donc: $\forall t \in \mathbb{R}: h(t) = h(0) = 0$, i.e.: $g(t) = e^{-tA}$

• étape 2: Alg A est de sur $\mathbb{C}$ et $S_p(A) \subseteq i\mathbb{Z}$

On a $e^{2\pi i A} = g(2\pi) = \mathcal{U}(e^{i2\pi}) = I_n$ montrons que $\lambda = 2\pi A$ est $\mathbb{C}$ -dz.

Par la décomposition de Dunford: $\lambda = D + N$ avec D $\mathbb{C}$ -dz, N nilp et $DN = ND$. * car $\mathbb{C}$ alg. dz.

On a alors: $I_n = e^\lambda = e^D e^N$ et donc $e^N = e^{-D}$ est $\mathbb{C}$ -dz.

Or, $S_p(e^N) \subseteq \exp(S_p(\lambda)) = \exp(\{0\}) = \{1\}$, et donc, on a forcément: $e^N = I_n$.

Supposons qu' $\exists x \in \ker(N^2) \setminus \ker(N)$.

On a: $x = e^N x = (I_n + N)x$ car $x \in \ker(N) \nmid$

Ainsi: $\ker(N^2) \subseteq \ker(N)$. Soit $x \in \ker(N^{k+1})$. On a $N^{k+1}x \in \ker(N^2) \subseteq \ker(N)$ donc $N^k x = 0$.

Ainsi: $\ker(N^k) = \ker(N^{k+1})$ et donc: $\ker(N) = \ker(N^n) = \mathbb{C}^n$, i.e.: $N = 0$.

Donc: $\lambda = D$ est $\mathbb{C}$ -dz. C'est donc également le cas pour A .

Soit $\lambda \in S_p(A)$: $e^{2\pi i \lambda} \in S_p(e^{2\pi i A}) = \{1\}$ car $\lambda \in i\mathbb{Z}$.

• étape 3: Conclusion:

$A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ donc, si $ik \in S_p(A)$ avec $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, alors $-ik$ est également vp de A avec la même mult. (car $\forall j: P^{(j)}(\lambda) = 0 \iff \overline{P^{(j)}(\lambda)} = 0 \iff P^{(j)}(\bar{\lambda}) = 0$)

Ainsi: $\exists k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tq:

$$A \sim_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} i k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & i k_r & & \\ & & & i k_r & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & i k_r \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\exists P \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{i k_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i k_r t} & & \\ & & & e^{i k_r t} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & e^{i k_r t} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Or, $\forall \theta \in \mathbb{R}$: $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} R_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & \\ & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$.

Donc: $\exists \tilde{P} \in GL_2(\mathbb{C})$ tq: $\forall t \in \mathbb{R}$: $e^{tA} = \tilde{P} \begin{pmatrix} R_{th_1} & & \\ & \ddots & \\ & & R_{th_{n-1}} & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tilde{P}^{-1}$

Par le lemme, $\exists Q \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $e^{tA} = Q \begin{pmatrix} R_{th_1} & & \\ & \ddots & \\ & & R_{th_{n-1}} & \\ & & & 1 \end{pmatrix} Q^{-1}$.

Vo la construction de Q dans le lemme, l'égalité reste vraie $\forall t \in \mathbb{R}$, ce qui donne le résultat voulu.