

* Point de Fermat d'un triangle: leçons 161, 215, 219, 229, 233 (218) [Revue] III 4.22

Soient A, B, C 3 points non alignés de $\mathbb{R}^2$ tq les 3 angles du triangle ABC soient strictement inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$.

Donc la 215: existence minimum, par A, B ou C de (i)
Dont les autres: juste (i)

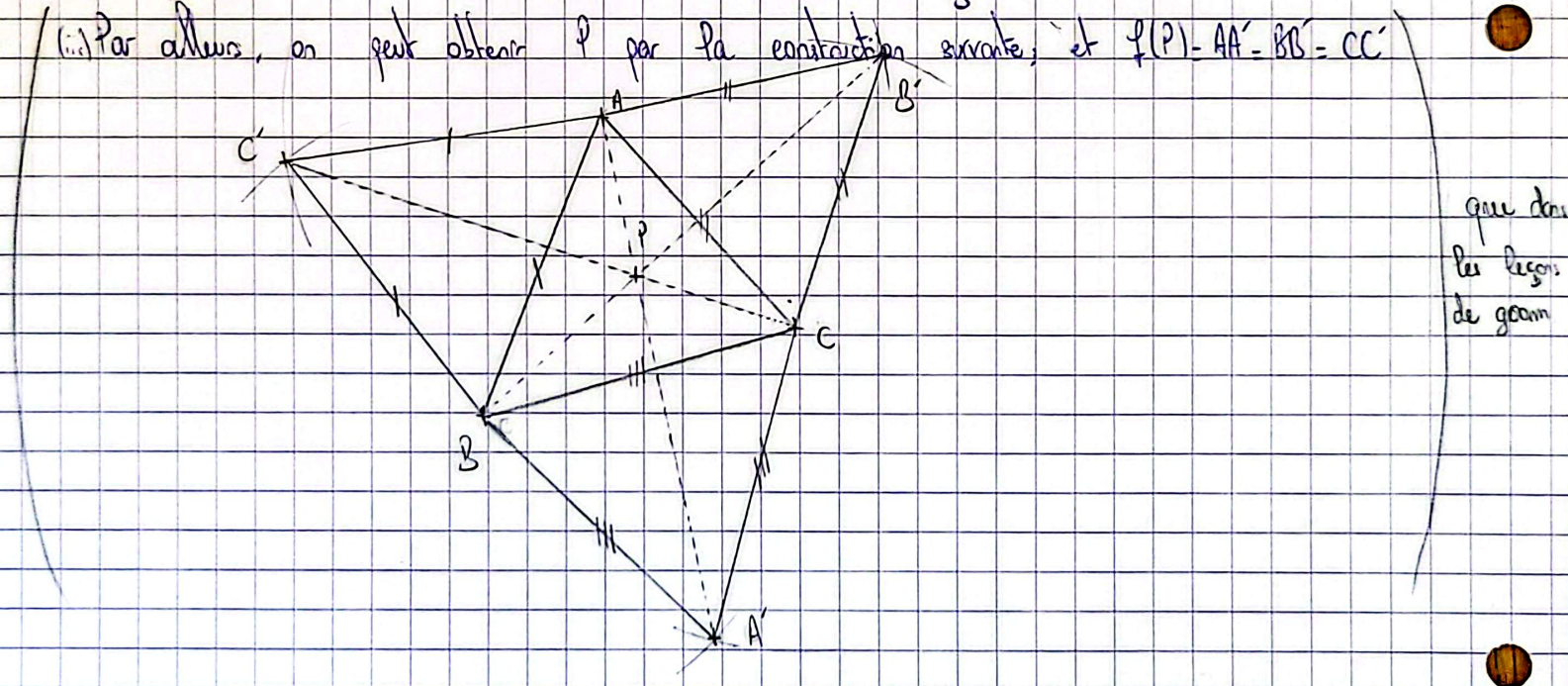
$$\text{Soit } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ H \mapsto HA + MB + MC$$

APoss:

(i) f atteint son minimum en un unique point P , intérieur à ABC .

(ii) De plus, P est caractérisé par $\widehat{APB} = \widehat{BPC} = \widehat{CPA} = \frac{2\pi}{3}$.

(iii) Par ailleurs, on peut obtenir P par la construction suivante, et $f(P) = AA' = BB' = CC'$



preuve:

(i)

• $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est C^0

* d/q f est strictement convexe:

Soient $M, N \in \mathbb{R}^2$ et $t \in]0,1[$.

Notons $G := tM + (1-t)N$. Par définition: $t\vec{GM} + (1-t)\vec{GN} = \vec{0}$ (*)

Ainsi: $GA = \|\vec{GA}\|$

$$= \|t\vec{GM} + (1-t)\vec{GN}\|$$

$$= \|t\vec{GM} + t\vec{MA} + (1-t)\vec{GN} + (1-t)\vec{NA}\|$$

$$= \|t\vec{MA} + (1-t)\vec{NA}\| \quad \text{par (*)}$$

$$\leq t\|\vec{MA}\| + (1-t)\|\vec{NA}\| \quad (\Delta)$$

$$= tMA + (1-t)NA.$$

Ainsi: $f(G) = GA + GB + GC \leq t f(M) + (1-t) f(N)$

De plus, l'égalité dans (Δ) implique que M, N et A sont alignés. Donc, l'égalité dans la ligne précédente force M, N, A, B et C à être alignés et donc en particulier A, B et C à l'être, ce qui n'est pas le cas par hypothèse.

Donc: $f(G) < t f(M) + (1-t) f(N) \leadsto f$ est st convexe.

• En particulier, f a au plus un minimum local et donc au plus un min global.

* d/q f est coercive:

Soit $O \in \mathbb{R}^2$ une origine fixe.

Par I.T.: $MA \geq OM - OA$ (d'après l'OM)

Donc: $f(M) \geq 3OM - f(O) \xrightarrow{OM \rightarrow +\infty} +\infty$

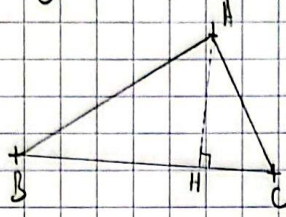
Ainsi, f est coercive et strictement convexe, donc elle admet un unique minimum global (et local) sur $\mathbb{R}^2$, on le note P .

* d/q $P \notin \{A, B, C\}$:

Notons $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ les 3 angles au vertex du triangle ABC .

On a $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$ et donc, (comme ABC est un vrai triangle) deux des trois angles précédents sont $< \frac{\pi}{2}$. Sans perdre de généralité, supposons $0 < \hat{B}, \hat{C} < \frac{\pi}{2}$.

Notons H le projeté orthogonal de A sur (BC) , on a alors $H \in]BC[$.



Donc: $f(H) = HA + HB + HC = HA + BC < BA + BC = f(B)$ (égalité stricte car $AB^2 = HB^2 + HA^2 > 0$)

Donc: $B \neq P$.

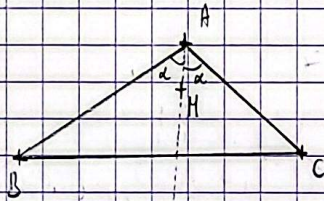
De même: $f(H) = HA + BC < CA + CB = f(C)$ donc $C \neq P$.

On veut maintenant montrer $A \neq P$.

Si $\hat{A} < \frac{\pi}{2}$, on peut réitérer l'argument précédent.

Si non, par hypothèse: $\frac{\pi}{2} \leq \hat{A} < \frac{2\pi}{3}$.

Soit H un point proche de A sur la bissectrice intérieure de $\hat{A} = 2\alpha$.



On a $HB^2 = AB^2 - 2AB \cdot AH \cos \alpha + AH^2$ (théorème d'Al-Kashi).

Donc: $HB = \sqrt{AB^2 - 2AB \cdot AH \cos \alpha + AH^2}$
 $= AB \sqrt{1 - 2 \frac{AH}{AB} \cos \alpha + \frac{AH^2}{AB^2}}$
 $= AB - AH \cos \alpha + O(AH^2)$

De même: $HC = AC - AH \cos \alpha + O(AH^2)$

Donc: $f(H) = AB + AC + AH(1 - 2 \cos \alpha) + O(AH^2)$
 $= f(A) - AH(2 \cos \alpha - 1) + O(AH^2)$

Or, $\alpha = \frac{\hat{A}}{2} \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$ donc $\cos \alpha \in]\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$, en particulier, $2 \cos \alpha - 1 > 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0$

Donc, pour H au voisinage de A : $f(H) < f(A)$ et donc: $P \neq A$.

* Il q $P \notin]ABC[$:

Soit $H \in]BC[$:

$f(H) = HA + HB + HC = HA + BC$

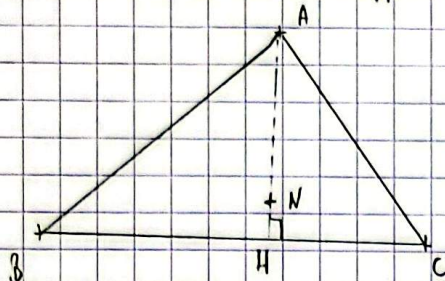
Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC) .

Par Pythagore: $HA^2 = HB^2 + HC^2$

Donc: $f(H) = BC + \sqrt{HA^2 + HH^2}$

Si $H \notin]B;C[$, alors $H \mapsto f(H)$ est strictement monotone sur $]B;C[$ donc $P \notin]B;C[$

Si non: $f(H) \geq f(H)$ donc il suffit de montrer que $P \neq H$



Soit N proche de H sur la hauteur AH .

On a: $BN^2 = BH^2 + HN^2$ donc $BN = \sqrt{BH^2 + HN^2} = BH + o(HN^2)$

De même: $CN = CH + o(HN^2)$

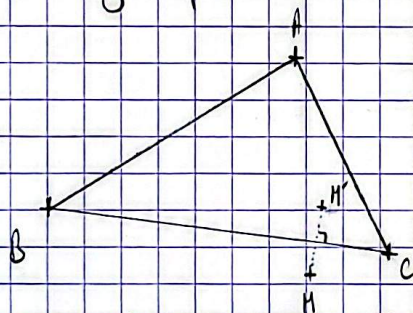
Donc: $f(N) = NA + NB + NC = HA - HN + HB + HC + o(HN^2) = f(H) - HN + o(HN^2) < f(H)$
 $HN \rightarrow 0$

Donc: $P \neq H$.

* dq $P \notin \text{Ext}(ABC)$.

Si $H \in]B;C[$ sans perdre de généralité: H et A sont de part et d'autre de (BC) .

Soit alors H' le symétrique de H par rapport à (BC) .



On a alors: $HB = H'B$ et $HC = H'C$ et $H'A < HA$

Donc: $f(H') < f(H) \leadsto P \neq H$

Finalement: $P \in \text{Int}(ABC)$.

(ii) f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{A; B; C\}$.

On a: $\nabla(\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ donc: $\nabla f(H) = -(\vec{u}_H + \vec{v}_H + \vec{w}_H)$ avec: $\vec{u}_H = \frac{\vec{HA}}{HA}$, $\vec{v}_H = \frac{\vec{HB}}{HB}$, $\vec{w}_H = \frac{\vec{HC}}{HC}$

On a donc: $\forall f(P) = 0$ i.e.: $\vec{u}_P + \vec{v}_P + \vec{w}_P = 0$

Donc: $1 = \vec{u}_P^2 = (\vec{u}_P + \vec{v}_P)^2 = \vec{u}_P^2 + 2(\vec{u}_P, \vec{v}_P) + \vec{v}_P^2 = 2 + 2(\vec{u}_P, \vec{v}_P)$

$\leadsto (\vec{u}_P, \vec{v}_P) = -\frac{1}{2} \leadsto \widehat{APB} = \frac{2\pi}{3}$

De même: $\widehat{BPC} = \widehat{CPA} = \frac{2\pi}{3}$

Ainsi, P voit le segment AB sous l'angle $\frac{2\pi}{3}$, il appartient donc à un arc de cercle passant par A et B (l'arc capable, grâce à la réciproque de l'angle au centre).

De même, P appartient à un arc capable passant par C et A. Les deux arcs se coupent au plus 2 pts qui sont $\overset{\text{donc}}{A}$ et P. Ainsi, la propriété

des angles caractérise bien P.

(iii) Orientons le plan de telle sorte que $\vec{AB}, \vec{AC}$ forme une base directe

On a $S = r(C)$ où r est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Notons $P' = r(P)$.

Par définition de P' : $(\vec{PP'}, \vec{PA}) = \frac{\pi}{3}$

De plus, par la question précédente: $(\vec{PA}, \vec{PB}) = \frac{2\pi}{3}$

Donc: $(\vec{PP'}, \vec{PB}) = (\vec{PP'}, \vec{PA}) + (\vec{PA}, \vec{PB}) = \pi$

Donc P, P' et B sont alignés

(1)

Par ailleurs, r conserve les angles donc: $(\vec{P'B'}, \vec{P'A}) = (\vec{P'C}, \vec{PA}) = \frac{2\pi}{3}$

Donc: $(\vec{P'B'}, \vec{P'P}) = (\vec{P'B'}, \vec{P'A}) + (\vec{P'A}, \vec{P'P}) = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$

Donc P, P' et B' sont alignés

(2)

Par (1) et (2), on obtient: P (et P') $\in (BB')$

De même: $PE(AC')$ et $PE(CC')$

De plus, si H est un point quelconque et $H' = r(H)$, alors:

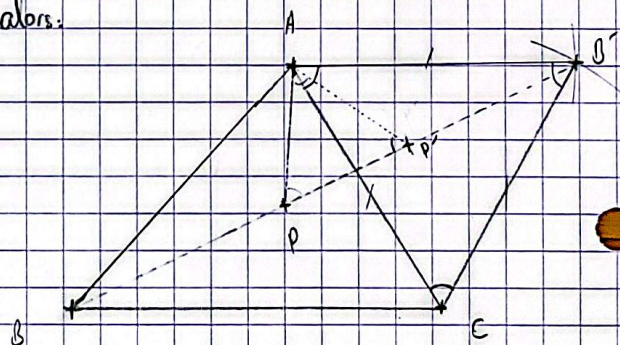
$f(H) = HA + HB + HC$

$= HH' + HB + H'B'$

$\geq BB'$

I.T.

avec égalité si $H=P$ par ce qu'on vient de dire



$\angle = \frac{\pi}{3}$