

* Théorème de Haar: degrés 148, 159, 203, 206, 209

Soit F un $\mathbb{R}$ -ev de $\mathcal{C}([a,b])$ de dimension finie n . On note $\|f\| = \|f\|_\infty$ sur $\mathcal{C}([a,b])$.

ASSE:

$$(i) \forall f \in \mathcal{C}([a,b]), \exists! q \in F \text{ tq } \|f - q\| = d(f, F)$$

$$(ii) \forall q \in F, \text{ si } q \text{ s'annule en } n \text{ points distincts, alors } q = 0.$$

preuve:

Dans la suite pour $t \in [a,b]$, on note $\delta_t: F \rightarrow \mathbb{C} \quad f \mapsto q(t)$

la cond: (ii) se réécrit:

$$\forall a \leq t_1 < \dots < t_n \leq b: \ker(\delta_{t_1}) \cap \dots \cap \ker(\delta_{t_n}) = \{0\}$$

Montrons que cette condition équivaut à:

$$\forall a \leq t_1 < \dots < t_n \leq b: (\delta_{t_1}, \dots, \delta_{t_n}) \text{ est une base de } F^* \quad (*)$$

• (ii) $\Rightarrow$ (*):

Soient $a \leq t_1 < \dots < t_n \leq b$, notons $H_i = \ker(\delta_{t_i})$. C'est soit un hyperplan soit l'espace F tout entier, i.e. $\text{codim } H_i \leq 1$.

Soit $j \in \{1, \dots, n\}$, supposons $\bigcap_{i \neq j} H_i \subseteq H_j$. On a alors: $\bigcap_{i=1}^n H_i = \bigcap_{i \neq j} H_i$ donc

$$\text{codim}(\bigcap_{i=1}^n H_i) = \text{codim}(\bigcap_{i \neq j} H_i) = \dim(\bigcap_{i \neq j} H_i)^\perp = \dim \sum_{i \neq j} H_i^\perp \leq \sum_{i \neq j} \text{codim } H_i \leq n-1$$

Or, par hypothèse, $\bigcap_{i=1}^n H_i = \{0\}$ donc $\text{codim}(\bigcap_{i=1}^n H_i) = n$: absurde.

Ainsi: $\bigcap_{i \neq j} H_i \not\subseteq H_j$. En particulier, $\exists x_j \in \bigcap_{i \neq j} H_i$ tq $\delta_{t_j}(x_j) = 1$.

La famille $(x_1, \dots, x_n)$ vérifie alors $\delta_{t_i}(x_j) = \delta_{ij}$ (c'est en fait la base orthonormale de $(\delta_{t_1}, \dots, \delta_{t_n})$).

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ vérifient $\sum \lambda_i \delta_{t_i} = 0$, alors $\sum \lambda_i \delta_{t_i}(x_j) = 0$, i.e. $\lambda_j = 0 \quad \forall j$.

Donc: $(\delta_{t_1}, \dots, \delta_{t_n})$ est libre et c'est donc bien une base de F^* par dimension.

• (*) $\Rightarrow$ (ii):

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ la base orthonormale de $(\delta_{t_1}, \dots, \delta_{t_n})$. Soit $x \in \bigcap_{i=1}^n H_i$, on a: $x = \sum_{i=1}^n \delta_{t_i}(x) x_i = 0$.

* (i) $\Rightarrow$ (ii): On raisonne par contraposée.

On suppose qu'il existe $a \leq t_1 < \dots < t_n \leq b$ et $q \in F \setminus \{0\}$ tq $q(t_1) = \dots = q(t_n) = 0$.

Par ce qu'on vient de dire: $(\delta_{t_1}, \dots, \delta_{t_n})$ n'est pas une base de F^* , c'est donc

forcément une famille liée (car cardinale): $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ non tous nuls tq $\lambda_1 \delta_{t_1} + \dots + \lambda_n \delta_{t_n} = 0$.

i.e.: $\forall q \in F: \alpha_1 q(t_1) + \dots + \alpha_n q(t_n) = 0$ (1)

On construit alors $w \in \mathcal{C}([a,b])$ affine par morceaux tq: $w(t_i) = \frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|}$ si $\alpha_i \neq 0$
 $= 0$ si $\alpha_i = 0$.

Soit alors $f = w(1 - \varepsilon |q_0|)$ avec $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2\|q_0\|}$ On a: $\forall i: f(t_i) = w(t_i)$ (2)

• d'q $d(f, F) \geq 1$:

Soit $q \in F$, on veut mq $\|f - q\| \geq 1$, il suffit donc de montrer qu' $\exists$ tq $|f(t_i) - q(t_i)| \geq 1$.

Supposons par l'absurde: $\forall i: |f(t_i) - q(t_i)| < 1$.

Par (1) et (2), on a: $\sum_{i=1}^n \alpha_i (f(t_i) - q(t_i)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i w(t_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i$

Or, par hypothèse: $|\sum_{i=1}^n \alpha_i (f(t_i) - q(t_i))| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| |f(t_i) - q(t_i)| < \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$ car au moins un des α_i est non nul.

~ absurde, donc:

$\|f - q\| \geq 1$ et donc: $d(f, F) \geq 1$.

• d'q $\forall \eta \in [0, \varepsilon]: \|f - \eta q_0\| \leq 1$:

$1 - \varepsilon |q_0| > 0$ car $\varepsilon \leq \frac{1}{2\|q_0\|}$ et donc: $\forall t \in [a, b]: |f(t) - \eta q_0(t)| = |w(t)(1 - \varepsilon |q_0(t)|) - \eta q_0(t)|$
 $\leq \underbrace{\|w\|}_{\leq 1} (1 - \varepsilon |q_0(t)|) + \eta |q_0(t)|$
 $\leq (1 - \varepsilon |q_0(t)|) + \varepsilon |q_0(t)| \leq 1$.

On en déduit: $\forall \eta \in [0, \varepsilon]: \|f - \eta q_0\| = 1 = d(f, F)$, ce qui permet de conclure

* (ii) $\Rightarrow$ (i):

Supposons que (ii) est vérifiée, i.e. que (*) est vérifiée.

Soit $f \in \mathcal{C}([a,b]) \setminus F$ (si $f \in F$, $d(f, F) = 0$ et est atteint uniquement en f)

Soit $q \in F$ tq $\|f - q\| = d(f, F)$ et notons $A_q := \{t \in [a,b], |f(t) - q(t)| = d(f, F)\}$ qui est non vide par compacité de $[a,b]$.

• d'q $|A_q| \geq n+1$:

Supposons par l'absurde que $|A_q| \leq n$: $\exists a < t_1 < \dots < t_n \leq b$ tq $A_q \subseteq \{t_1, \dots, t_n\}$.

Soit $(q_1, \dots, q_n)$ la base orthogonale de $(\delta_{t_1}, \dots, \delta_{t_n})$. $\tilde{q} := \sum_{i=1}^n (f(t_i) - q(t_i)) q_i \in F$ vérifie alors:

$\forall t \in A_q: \tilde{q}(t) = f(t) - q(t) = g(t)$ avec $g := f - q$.

Soit $\varepsilon > 0$:

Pour $t \in A_q$, notons U_t un voisinage ouvert de t tq $\forall s \in U_t: |g(t) - g(s)|, |\tilde{q}(t) - \tilde{q}(s)| < \varepsilon$.

et $U := \bigcup_{t \in A_q} U_t$.

Dev. tra. 29. Soit $\eta > 0$ qu'on prendra assez petit ensuite.

- Soit $s \in U$.

$\exists t \in A_q$ tq $s \in U_t$. On a $g(t) = \tilde{q}(t)$ et donc

$$|g(s) - \eta \tilde{q}(s)| = |g(s) - \eta g(t) + \eta g(t) - \eta \tilde{q}(t) + \eta \tilde{q}(t) - \eta \tilde{q}(s)|$$

$$\leq (1-\eta)|g(s)| + \eta \varepsilon$$

$$\leq (1-\eta)\|g\| + \eta \varepsilon$$

$$= d(f, F) - \eta(d(f, F) - \varepsilon) < d(f, F) \quad \text{pour } \varepsilon \text{ assez petit (indépendamment de } \eta)$$

- U^c est un fermé de $[0, b]$ et donc un compact, contenu dans A^c .

On a donc : $\sup_{s \in U^c} |g(s)| < d(f, F)$

Ainsi : $\forall s \in U^c : |g(s) - \eta \tilde{q}(s)| \leq \sup_{s \in U^c} |g(s)| + \eta \|\tilde{q}\| < d(f, F)$ pour η assez petit.

Ainsi : $\|g - \eta \tilde{q}\| < d(f, F)$, i.e. : $\|f - \underbrace{(g + \eta \tilde{q})}_{\in F}\| < d(f, F)$: absurde.

no On a bien $|A_q| \geq n+1$.

• Conclusion :

Supposons que q_1 et $q_2 \in F$ vérifient $\|f - q_1\| = \|f - q_2\| = d(f, F)$. Posons $q = \frac{q_1 + q_2}{2}$.

On a : $\|2f - (q_1 + q_2)\| \leq \|f - q_1\| + \|f - q_2\| = 2d(f, F)$ donc $\|f - q\| \leq d(f, F)$ et on a donc

égalité car $q \in F$. On sait alors en particulier que $|A_q| \geq n+1$.

Soit $t \in A_q$.

$$d(f, F) = \|f(t) - q(t)\| = \frac{1}{2} \|2f(t) - (q_1 + q_2)(t)\| \stackrel{①}{\leq} \frac{1}{2} (\|f(t) - q_1(t)\| + \|f(t) - q_2(t)\|) \stackrel{②}{\leq} \frac{1}{2} (\|f - q_1\| + \|f - q_2\|) = d(f, F)$$

On a donc égalité partout, en particulier : ① no $f(t) - q_1(t)$ et $f(t) - q_2(t)$ sont positivement liés.

$$\textcircled{2} \text{ no } \|f(t) - q_1(t)\| = \|f(t) - q_2(t)\| = d(f, F)$$

On en déduit : $f(t) - q_1(t) = f(t) - q_2(t)$ no $q_1(t) = q_2(t)$.

Ainsi, q_1 et q_2 coïncident en les $n+1$ points de A et donc, par (1) : $q_1 = q_2$.