

\* Principe d'incertitude auédois: leçons 201, 234, 235, 239, 241, 246, 250 [Bernie Bernie] 32

Soit  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , on note  $A := \{t \in \mathbb{R}, f(t) \neq 0\}$  et  $B := \{\xi \in \mathbb{R}, \hat{f}(\xi) \neq 0\}$ .

Si  $\lambda(A) < +\infty$  et  $\lambda(B) < +\infty$ , alors:

$$f = 0 \quad \lambda\text{-p.p.} \quad (\text{convent: } \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i t \xi} dt)$$

rq: Commencer par traiter le cas  $\lambda(A) < 1$  et expliquer à la fin et admettre la partie sur  $\lambda(A)$  reste inchangé si on remplace  $f$  par  $g$  une fonction égale  $\lambda$ -p.p.

preuve: Supposons par l'absurde  $\lambda(A) > 0$ .

Il y a q ops  $\lambda(A) \in ]0, 1[$ :

Posez  $g = f(c)$  pour un  $c > 0$ .

On a  $g \in L^2$  et  $A_g = \{t \in \mathbb{R}, f(ct) \neq 0\} = \frac{A_f}{c}$  donc  $\lambda(A_g) = \frac{\lambda(A_f)}{c}$

$$\text{De plus: } \hat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(ct) e^{-2\pi i t \xi} dt = \int_{u=ct}^{+\infty} f(u) e^{-2\pi i \frac{u}{c} \xi} \frac{du}{c} = \frac{1}{c} \hat{f}\left(\frac{\xi}{c}\right)$$

Ainsi:  $B_g = \{f \in \mathbb{R}, \frac{1}{c} \hat{f}(\xi) \neq 0\} = \{f \in \mathbb{R}, \hat{f}(\xi) \neq 0\} = cB_f$

Donc:  $\lambda(B_g) = c\lambda(B_f) < +\infty$

Ainsi, pour  $c > 1$ :  $\lambda(A_g) = \frac{\lambda(A_f)}{c} < 1$  et  $\lambda(B_g) < +\infty$ , donc ops  $\lambda(A) \in ]0, 1[$

\* d'q pour presque tous  $t, \xi \in \mathbb{R}$ ,  $f(t+k)$  et  $\hat{f}(\xi+k) \neq 0$  pour un nb au plus fin de  $k \in \mathbb{Z}$ .

Soit  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$t \mapsto \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 1_A(t+k)$$

Par convergence monotone.

$$\int_0^1 \phi = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 1_A(t+k) dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+1} 1_A(t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} 1_A(t) dt \quad \text{par Chasles}$$

$$= \lambda(A) < +\infty.$$

En particulier,  $\phi(t) < +\infty$  pour presque tout  $t \in \mathbb{R}$

Or,  $\phi(t) < +\infty \Leftrightarrow t+k \in A$  pour un nb au plus fin de  $k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow f(t+k) \neq 0 \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---}$$

Donc le résultat tombe pour  $f$  et on peut faire la même chose pour  $\hat{f}$

$\leadsto \exists E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  tq  $\lambda(E^c) = 0$  et  $\forall t, \xi \in E$ :  $f(t+k) \neq 0$  pour un nb au plus fin de  $k \in \mathbb{Z}$

$$\hat{f}(\xi+k) \neq 0 \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---}$$

Soit  $\xi_0 \in E$ . Pour  $k \in \mathbb{Z}$  et  $t \in \mathbb{R}$ , on pose:  $u_k(t) = f(t+k) e^{-2i\pi \xi_0(t+k)}$

On pose  $\psi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k(t)$ , par ce qu'on vient dire,  $\forall t \in E$ : la série est AC et  $\psi(t)$  est

bien def (donc bien def  $\lambda_{\text{per}}$ ).

$$\text{De plus, } \psi(t+1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t+1+k) e^{-2i\pi \xi_0(t+1+k)} = \sum_{p=k+1}^{+\infty} f(t+p) e^{-2i\pi \xi_0(t+p)} = \psi(t)$$

\* d'q  $\psi \in L^1_{\text{per}}$ :

$$\text{Par Fubini-Tonelli: } \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 |u_k(t)| dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 |f(t+k)| dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+1} |f(t)| dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty \quad \text{car } f \in L^1$$

Donc,  $u \in L^1(\mathbb{Z} \times ]0, 1[)$  et donc, par Fubini  $\int_0^1 |\psi(t)| dt < +\infty$

$\leadsto \psi \in L^1_{\text{per}}$

⌘\* dlq  $\Psi = P$  l.p.p avec  $P$  polynôme trigo sur  $[0, 1]$ .

Calculons les coefficients de Fourier de  $\Psi$ :

$$\begin{aligned} c_n(\Psi) &= \int_0^1 \Psi(t) e^{-2i\pi nt} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t+k) e^{-2i\pi f_0(t+k) - 2i\pi nt} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(t+k) e^{-2i\pi f_0(t+k) - 2i\pi nt} dt \quad \text{par Fubini} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{t=k}^{t=k+1} f(u) e^{-2i\pi f_0 u - 2i\pi n(u-k)} du \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{t=k}^{t=k+1} f(u) e^{-2i\pi f_0 u - 2i\pi nu} du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-2i\pi u(f_0+n)} du \\ &= f(\xi_0+n) \end{aligned}$$

Posons  $P: t \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\Psi) e^{2i\pi nt} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(\xi_0+n) e^{2i\pi nt}$

$\xi_0 \in \mathbb{E}$  donc  $f(\xi_0+n) \neq 0$  pour un nb au + fini de  $n \in \mathbb{Z}$  et donc  $P$  est un polynôme trigo.

En particulier,  $P \in L^2_{\text{per}}$ .

Or,  $P$  et  $\Psi$  ont les mêmes coefficients de Fourier donc, par le théorème de Fejér:

$\perp$   $P = \Psi$  l.p.p.

⌘\* dlq  $\lambda(\{t \in [0, 1], P(t) = 0\}) > 0$ :

$$\begin{aligned} \{t \in [0, 1], \Psi(t) \neq 0\} &\subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{t \in [0, 1], f(t+k) \neq 0\} \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{u \in [k, k+1], f(u) \neq 0\} - k \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (A \cap [k, k+1]) - k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc: } \lambda(\{t \in [0, 1], \Psi(t) \neq 0\}) &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda(A \cap [k, k+1]) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda(A \cap [k, k+1]) \\ &= \lambda(A) < 1 \end{aligned}$$

$\perp$  Donc,  $\lambda(\{t \in [0, 1], \Psi(t) = 0\}) > 0$  et donc  $\lambda(\{t \in [0, 1], P(t) = 0\}) > 0$ .

⌘\* dlq  $P = 0$ :

Supposons  $P \neq 0$ :  $P(t) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{2i\pi nt}$  avec les  $a_n$  non tous nuls.

On va mg  $Z(P) = \{t \in \mathbb{M}, P(t) = 0\}$  est dénombrable au plus:

Soit  $t \in Z(P)$ :  $0 = e^{2i\pi Nt} P(t) = \sum_{n=0}^{2N} a_{n-N} e^{2i\pi nt}$

donc  $e^{2\pi i t}$  est racine du polynôme  $\sum_{n=0}^{2N} a_n X^n$ , notons  $\{e^{2\pi i \theta_k}, k \in [1, P]\}$  l'ensemble de ses racines unitaires ( $P \leq 2N$ ).

$$\leadsto e^{2\pi i t} \in \{e^{2\pi i \theta_k}, k \in [1, P]\}$$

$$\leadsto t \in \bigcup_{k \in [1, P]} (\theta_k + \mathbb{Z}) \quad \text{qui est dénombrable.}$$

$$\text{En particulier: } \lambda(Z(P)) \leq \lambda\left(\bigcup_{k \in [1, P]} (\theta_k + \mathbb{Z})\right) = 0 : \text{absurd.}$$

$$\text{L Donc: } P=0.$$

$$\text{En particulier: } \forall n \in \mathbb{Z}: 0 = c_n(P) = c_n(\psi) = \hat{f}(\xi_0 + n)$$

$$\text{Donc: } \forall \xi_0 \in E: \hat{f}(\xi_0 + 0) = 0.$$

$$\text{Et donc: } \hat{f} = 0 \quad (\text{parce que } \hat{f} \in \mathcal{C}^0).$$

$$\text{En particulier, } \hat{f} \in L^2 \text{ et donc, par la formule d'inverse: } f = 0.$$