

+ Perron - Frobenius dans le cas ergodique: leçons 153, 206, 262, 264, 226, 102 [Appd] XXVII 30

On dit que $P \in M(\mathbb{R})$ est ergodique lorsqu'elle est stochastique et qu'il existe $k > 0$ tq $P^k > 0$.

Une loi invariante pour P est un vecteur propre à gauche $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_d)$ pour la valeur propre 1 (i.e. $\pi P = \pi$) vérifiant $\forall i: \pi_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^d \pi_i = 1$.

Soit P une matrice ergodique.

Alors:

faute 3) et 4) en même temps

1) $\forall \lambda \in \text{Spec}(P): |\lambda| \leq 1$.

2) 1 est l'unique μ de module 1, elle est de multiplicité (algébrique) 1.

3) $\exists! \pi^*$ loi invariante, ses composantes sont > 0 .

4) $P^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P^\infty := \begin{pmatrix} \pi^* \\ \vdots \\ \pi^* \end{pmatrix}$, en particulier, $\forall$ la initiale π_0 : $\pi_0 P^n \rightarrow \pi^*$ (valeur géométrique)

preuve:

1) Soit $\lambda \in \text{Sp}_\mathbb{C}(P)$, et X un $\vec{v}$ associé tq $\|X\|_\infty = 1$. On note $P = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$

Soit i tq $|a_{ii}| = \|X\|_\infty$, on a. $|\lambda| = \|X\|_\infty = |\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = 1$

• On commence par montrer les points suivants dans le cas $P > 0$

2) $\forall \lambda \in \text{Sp}_\mathbb{C}(P)$, on note $E_\lambda(P)$ le sous-espace propre de $\mathbb{C}^d$ associé à λ .

P est stochastique donc on a $1 \in \text{Sp}_\mathbb{R}(P)$ (sans entendre à partir de maintenant dans $\mathbb{C}$), et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in E_1(P)$.

* Soit $\lambda \in \text{Sp}_\mathbb{C}(P)$ tq $|\lambda| = 1$. On va montrer dans le même temps $\lambda = 1$ et $E_\lambda(P) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Soit $X \in E_\lambda(P)$ tq $\|X\|_\infty = 1$ et i tq $|a_{ii}| = \|X\|_\infty = 1$. On va remplacer X par $\frac{1}{x_i} X$, ops $x_i = 1$.

On a alors $1 = |\lambda| = \|X\|_\infty = |\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = 1$.

On a donc égalité partout, en particulier $\forall j: |x_j| = 1$ et le cas d'égalité de P.T.T.

nous informe que $x_j \in \mathbb{R}_{+1}$. Ainsi, $\forall j: x_j = 1$, et donc $X \in \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

* car $P > 0$

→ On a en particulier: $E_1(P) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

De plus: $\lambda = \lambda x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$.

+ Notons maintenant m la multiplicité algébrique de 1 et $F = \ker(P - \text{Id})^m$ le sous-espace caractéristique associé. Montrons que $m = 1$.

Notons $u: F \rightarrow F$ l'endomorphisme induit par P . $\forall n \in \mathbb{N}$, P^n est stochastique donc $\|P^n\|_\infty \leq 1$.

Ainsi, pour $\|\cdot\|$ une norme d'opérateur quelconque sur $\text{M}_d(\mathbb{C})$, $(\|P^n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Donc: $\forall x \in F: \|u^n(x)\| = \|P^n x\| \leq \|P^n\| \|x\|$ donc $(u^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{C}^d$.

Notons $v := u - \text{id}_F \in \mathcal{L}(F)$ nilpotent par déf. de F . Soit $v \in \ker(v^2)$.

Alors: $u^n(x) = (\text{id} + v)^n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} v^k(x) = x + nv(x)$.

En particulier, par ce qu'on vient de dire: $(nv(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée sur $\mathbb{C}^n$, donc

$v(x) = 0$. On a donc: $\ker(v) = \ker(v^2)$. On en déduit: $\ker(P - \text{Id}) = \ker(P - \text{Id})^2$ et donc

$\ker(P - \text{Id}) = \ker(P - \text{Id})^m$, i.e.: $F = E_1(P) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Et donc: $m = \dim F = 1$.

3) Une loi invariante correspond à un $\vec{v}$ stochastique associé à 1 de ${}^t P$.

Or, $\pi_1 = \pi_P$ donc 1 est $\vec{v}$ de mult. algébrique 1 de ${}^t P$. En particulier,

$\dim(E_1({}^t P)) = 1$ (ce qui donne l'unicité de π^* sous réserve d'existence).

On montre 4) avant de montrer l'existence de π^* .

4). On réduit P sous forme de Jordan: $P = Q \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{pmatrix} Q^{-1}$ où $J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix}$, $|\lambda_k| < 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N}: P^n = Q \begin{pmatrix} J_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & J_r^n \end{pmatrix} Q^{-1}$$

Or, $J_k^n = \sum_{j=0}^{n-m_k} \binom{n}{j} \lambda_k^{n-j} C^j$ où m_k est la taille de J_k et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ nilpotente d'indice m_k . Par croissance comparée: $J_k^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (vitesse géométrique).

$$\text{Donc: } P^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} =: P^\infty$$

Par fermeture des matrices stochastiques dans $M_d(\mathbb{C})$, P^∞ est une matrice stochastique de rang 1. Ainsi, $\exists \pi^*$ une ligne stochastique tq $P^\infty = \begin{pmatrix} \pi^* \\ \vdots \\ \pi^* \end{pmatrix}$.

• clq π^* est la loi invariante de P et $\pi^* > 0$.

$$\text{On a } \forall n \in \mathbb{N}: P^n P = P P^n = P^{n+1}, \text{ donc, à la limite: } P P^\infty = P^\infty P = P^\infty$$

$$\text{Or, } \pi^* P^\infty = \pi^* \text{ donc: } \pi^* = \pi^* P^\infty = \pi^* P^\infty P = \pi^* P, \text{ donc } \pi^* \text{ est la loi invariante de } P.$$

$$\text{De plus, } \forall j: \pi_j^* = \sum_{i=1}^n \pi_i^* a_{ij} > 0 \text{ car } P > 0, \text{ donc: } \pi^* > 0.$$

• Reste à généraliser pour P ergodique: $\exists n$ tq $\forall k \geq n: P^k > 0$ (car stoch. $\times$ stoch. $\stackrel{!}{=} \text{stoch.}$)

Soit $\lambda \in \mathcal{S}_1(P)$. On a $\lambda^n \in \mathcal{S}_1(P^n)$ et $\lambda^{n+1} \in \mathcal{S}_1(P^{n+1})$ donc, par ce qu'on vient de faire:

$$\lambda^n = \lambda^{n+1} = 1. \text{ Donc: } \lambda = 1.$$

$$\text{De plus: } E_1(P) \subseteq E_1(P^n) = \text{vect} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

la suite reste valable car $P^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n$