

* lemme de Fitting et cardinal du cône nilpotent: degrés 123; 150; 151; 156; 190 (101) [Caldesi-Pecorelli]

IS 67

+ [Caldesi-Pecorelli] 1.6.4

Soit E un $\mathbb{K}$ -ex quelconque et $u \in \mathcal{L}(E)$.

On note $a(u) := \inf \{ p \in \mathbb{N}, \ker(u^p) = \ker(u^{p+1}) \}$ et $d(u) := \inf \{ q \in \mathbb{N}, \operatorname{Im}(u^q) = \operatorname{Im}(u^{q+1}) \}$. (l'ascende et la descende de u).

Montrer 2) et 3) du lemme 1. (en d'un firc) + ph.

lemme 1:

Si $a(u), d(u) < +\infty$, alors:

1) $a(u) = d(u) =: p$

2) $E = \ker(u^p) \oplus \operatorname{Im}(u^p)$

3) $u|_{\operatorname{Im}(u^p)} \in GL(\operatorname{Im}(u^p))$ et $u|_{\ker(u^p)}$ nilpotent.

la décomposition de Fitting de u est $((\ker(u^p), \operatorname{Im}(u^p)), u|_{\ker(u^p)}, u|_{\operatorname{Im}(u^p)})$.

lemme 2:

la donnée de $((F, G), v, w)$ avec $F \oplus G = E$, $v \in \mathcal{L}(F)$ nilpotent, $w \in GL(G)$, $v|_F$, $w = u|_G$ détermine entièrement u (si $a(u), d(u) < +\infty$), de plus chaque tel uplet est obtenu par un u vérifiant $a(u), d(u) < +\infty$.

Th.

On note nd le nombre de matrices $M \in M_d(\mathbb{F}_q)$ nilpotentes.

On a: $nd = q^{d(d+1)}$

preuve du lemme 1:

On va montrer: $\ker(u^d) = \ker(u^{d+1}) \Leftrightarrow \ker(u) \cap \text{Im}(u^d) = \{0\}$ (A)

$\text{Im}(u^d) = \text{Im}(u^{d+1}) \Leftrightarrow \ker(u^d) + \text{Im}(u) = E$. (B).

(A): $\Rightarrow$: Soit $x \in \ker(u) \cap \text{Im}(u^d)$: $x = u^d(y)$ et $0 = u(x) = u^{d+1}(y)$. Donc $y \in \ker(u^{d+1}) = \ker(u^d) \leadsto x = 0$.

$\Leftarrow$: Soit $x \in \ker(u^d)$: $u^d(x) \in \ker(u) \cap \text{Im}(u^d) = \{0\}$ donc $x \in \ker(u^d)$.

(B): $\Rightarrow$: Soit $x \in E$: $u^d(x) \in \text{Im}(u^d) = \text{Im}(u^{d+1})$ donc $u^d(x) = u^{d+1}(y)$ $\leadsto x - u(y) \in \ker(u^d)$.

$\Leftarrow$: Soit $x \in \text{Im}(u^d)$: $x = u^d(y) = 0$, $y = u(y_1) + y_2$ avec $y_1 \in \ker(u^d) \leadsto x = u^{d+1}(y_1)$.

1) Notons $p = a(u)$ et $q = d(u)$. ($\Leftarrow$ par hyp.)

Supposons $p < q$:

Par (B) et def de q , on a: $\ker(u^q) + \text{Im}(u) = E$.

Or, par def de p : $\ker(u^p) = \ker(u^q)$ donc $E = \ker(u^p) + \text{Im}(u)$. Ainsi, encore par (B):

$\text{Im}(u^p) = \text{Im}(u^{p+1})$: absurde.

Si $p > q$: on fait qpc. de même en utilisant (A).

$\leadsto$ on a bien $p = q$.

2) Soit $x \in \ker(u^p) \cap \text{Im}(u^p)$: $x = u^p(y) \leadsto 0 = u^p(x) = u^{2p}(y)$. Or, $\ker(u^p) = \ker(u^{2p})$ donc $x = u^p(y) = 0$.

Soit $x \in E$: $u^p(x) \in \text{Im}(u^p) = \text{Im}(u^{2p})$ donc $u^p(x) = u^{2p}(y) \leadsto x - u^p(y) \in \ker(u^p)$.

3) $\text{Im}(u^p)$ est stable par u et $u|_{\text{Im}(u^p)}$ injectif grâce à (A).

De plus: $u(\text{Im}(u^p)) = \text{Im}(u^{p+1}) = \text{Im}(u^p)$ donc $u|_{\text{Im}(u^p)}$ surjectif.

preuve du lemme 2:

On a construit une application: $\varphi: \underbrace{\{(u \in M(E), a(u), d(u)) \mid \dots\}}_{=: X} \rightarrow \underbrace{\{(F, G), v, w, F \oplus G = E, x \in M(F) \text{ nilp.}, w \in GL(G)\}}_{=: Y}$.

On va montrer $\varphi: Y \rightarrow X$ est bien def. et que φ et ψ sont réciproques l'une de l'autre.

Pour cela:

$\neq \varphi$ bien def: $(v \oplus w)^n = v^n \oplus w^n = w^n$ après p . Donc: $\forall n \geq p, \text{Im}(w \circ v^n) = G, \ker(w \circ v^n) = F$ (*)

Do. Alg. 14.

7

* $\text{Vol} = \text{id}_X$: dar.

* $\text{Vol} = \text{id}_Y$: grâce à (V).

preuve du théorème:

On considère E un $\mathbb{F}_q$ -er de dimension d sur $\mathbb{F}_q$, quelconque.

On note $X_k := \{(F, G) \text{ sur de } E, F \oplus G = E, \dim F = k\}$, on a une action naturelle $GL(E) \curvearrowright X_k$.

• d'q l'act' est transitive:

Soient $(F, G), (F', G') \in X_k$. Soit β base adaptée à $E = F \oplus G$ et β' adaptée à $E = F' \oplus G'$.

Soit $u \in GL(E)$ envoyant β sur β' , on a bien $u(F, G) = (F', G')$.

• Ainsi: $|X_k| = \frac{|GL(E)|}{|Stab(F, G)|}$ avec $(F, G) \in X_k$ quelconque.

Notons $g_d := |GL(E)| (= |GL_d(\mathbb{F}_q)|$ via le choix d'une base).

Calculons $|Stab(F, G)|$:

$u \in Stab(F, G) \Leftrightarrow u|_F \in GL(F)$ et $u|_G \in GL(G)$, donc: $Stab(F, G) \simeq GL(F) \times GL(G)$.

$$\sim |X_k| = \frac{g_d}{g_k g_{d-k}}$$

• De plus, les lemmes nous indiquent:

$$d(E) \simeq \bigsqcup_{k=0}^d \bigsqcup_{(F, G) \in X_k} d(F, G), \quad v \in d(F) \cap \dots, w \in GL(G).$$

$$\text{Donc: } |d(E)| = \sum_{k=0}^d |X_k| n_k g_{d-k} = \sum_{k=0}^d n_k \frac{g_d}{g_k} \quad \text{par ce qu'on veut de faire.}$$

$$\text{Or, } |d(E)| = q^{d^2} \text{ (car } \dim d(E) = d^2), \text{ donc: } q^{d^2} = \sum_{k=0}^d n_k \frac{g_d}{g_k} \sim \frac{q^{d^2}}{g_d} = \sum_{k=0}^d \frac{n_k}{g_k}$$

$$\sim \frac{nd}{g_d} = \frac{q^{d^2}}{g_d} - \frac{(d-1)^2}{g_{d-1}} \sim nd = q^{d^2} - q^{\frac{(d-1)^2}{g_{d-1}}}$$

$$\text{Or, } g_d = (q^d - 1)(q^d - q) \dots (q^d - q^{d-2}) = q^{\frac{d(d-1)}{2}} (q^d - 1) \dots (q - 1)$$

$$\text{Donc: } \frac{g_d}{g_{d-1}} = q^{d-1} (q^d - 1)$$

$$\sim nd = q^{d^2} - q^{\frac{(d-1)^2}{g_{d-1}}} q^{d-1} (q^d - 1) = q^{d^2} - q^{d(d-1)} (q^d - 1) = q^{d(d-1)}$$