

* Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$: degrés 103, 106, 103, 153, 161, 204

[Caldero: Algèbre] III 5

$SO_3(\mathbb{R})$ est un groupe simple.

preuve:

Soit $H \triangleleft SO_3(\mathbb{R})$, $H \neq \{id\}$.

Soit $g \in SO_3(\mathbb{R})$:

Par la réduction du isométrisme de $\mathbb{R}^3$, on sait qu'il existe $h \in O_3(\mathbb{R})$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tq:

$$g = h \begin{pmatrix} 1 & & \\ & R_\theta & \\ & & 1 \end{pmatrix} h^{-1} \quad \text{où} \quad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors, $g_t := h \begin{pmatrix} 1 & & \\ & R_{t\theta} & \\ & & 1 \end{pmatrix} h^{-1}$, $t \in [0; 1]$ décrit un chemin continu de id à g dans $SO_3(\mathbb{R})$.

En particulier, $SO_3(\mathbb{R})$ est connexe par arcs (l'argument marche pour n quelconque)

Soit $h \in H \setminus \{id\}$:

On pose $\ell: SO_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$g \mapsto \text{tr}(ghg^{-1}h^{-1})$$

On a $ghg^{-1}h^{-1} \in SO_3(\mathbb{R})$ donc $ghg^{-1}h^{-1} \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & R_\theta & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$

$$\text{Ainsi: } \ell(g) = \text{tr}(ghg^{-1}h^{-1}) = \text{tr} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & R_\theta & \\ & & 1 \end{pmatrix} = 1 + 2\cos \theta$$

En particulier: $\ell(g) \in [-1; 3]$, et de plus: $3 = \ell(id)$

* d/q $\ell(SO_3(\mathbb{R})) = [a; 3]$ avec $a \in [-1; 3]$:

ℓ est clairement continue et $SO_3(\mathbb{R})$ est connexe et compact donc $\ell(SO_3(\mathbb{R}))$ est un connexe compact de $\mathbb{R}$, i.e. un segment.

Par ce qu'on vient de dire, il est de la forme $[a; 3]$ avec $a \leq 3$.

Reste à montrer que $a < 3$.

Par hypothèse: $h \in SO_3(\mathbb{R}) \setminus \{id\}$, et donc h n'est pas une homothétie.

$$\exists x \in \mathbb{R}^3, h(x) \notin \mathbb{R}x$$

Soit alors g la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe $\mathbb{R}x$.

$$\text{On a } g \in SO_3(\mathbb{R}).$$

Or, $\ker(g - id) = \mathbb{R}x$, et, par ce qu'on vient de dire, $\mathbb{R}x$ n'est pas stable par h . On en déduit que g et h ne commutent pas.

Donc:

$$ghg^{-1}h^{-1} \neq id$$

Ainsi:

$$ghg^{-1}h^{-1} \sim \begin{pmatrix} 1 & \\ & R_\theta \end{pmatrix} \quad \text{avec } \theta \neq 0 [2\pi]$$

Donc:

$$\ell(g) = 1 + 2\cos\theta < 3$$

Ainsi:

$$a < \ell(g) < 3.$$

Soit alors $n \geq 1$ tq $1 + 2\cos(\frac{\pi}{n}) \in]a; 3[$ (possible car $1 + 2\cos(\frac{\pi}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 3$), on dispose donc de $g_n \in SO_3(\mathbb{R})$ tq $\ell(g_n) = 1 + 2\cos(\frac{\pi}{n})$.

$$\text{On pose } h_n := g_n h g_n^{-1} h^{-1}$$

$$\text{Par ce qu'on vient de dire: } \text{tr}(h_n) = 1 + 2\cos(\frac{\pi}{n})$$

$$\text{Ainsi: } h_n = u \begin{pmatrix} 1 & \\ & R_\theta \end{pmatrix} u^{-1} \quad \text{avec } u \in O_3(\mathbb{R}) \text{ et } \theta = \pm \frac{\pi}{n}$$

De plus, par hypothèse, $H \triangleleft SO_3(\mathbb{R})$ donc $h_n = \underbrace{g_n h g_n^{-1}}_{\in H} \underbrace{h^{-1}}_{\in H} \in H$.

Ainsi:

$$h_n = u \begin{pmatrix} 1 & \\ & R_{\frac{\pi}{n}} \end{pmatrix} u^{-1} \in H$$

i.e.: H contient un retournement orthogonal.

* d'lg les retournements sont conjugués dans $SO_3(\mathbb{R})$.

Posons $r = h_n$. C'est le retournement orthogonal d'axe $D = \ker(r - id)$.

Soit alors $g \in SO_3(\mathbb{R})$.

Par le principe de conjugaison, grg^{-1} est encore un retournement orthogonal (ici il suffit de remarquer que $grg^{-1} \in SO_3(\mathbb{R})$ grâce au déterminant puis de calculer la trace de grg^{-1}).

$$\text{De plus, } grg^{-1}(g(D)) = gr(D) = g(D).$$

Donc: grg^{-1} est le retournement d'axe $g(D)$.

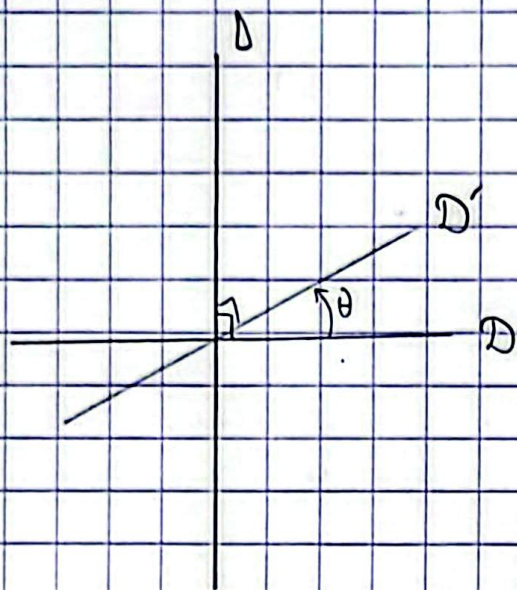
Ex. Alg. 24

Soit alors r' un autre retournement orthogonal quelconque, d'axe D' .

Soient Δ une droite orthogonale à D et D' et θ l'angle entre D et D' .

Alors, $g \in SO_3(\mathbb{R})$ la rotation d'angle θ autour de Δ (pour la bonne orientation de Δ)

g vérifie $g(D) = D'$ et donc $g \circ g^{-1} = r' \in H$



Ainsi: tous les retournements sont dans H .

Or, les retournements engendrent $SO_3(\mathbb{R})$, donc $H = SO_3(\mathbb{R})$