

* Enveloppe convexe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$: leçons 157, 158, 159, 161, 181.

[Oselede - Fudy] VI.2.4

Soit B la boule unité fermée pour la norme subordonnée à la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$. Alors:

+ [Ded. Math. de Bourb.] III.1.2

[Ikenman - Pecate] 26

$$B = \text{conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R})).$$

Lemme:

Soit H un H -espace réel et $C \subseteq H$ une partie convexe fermée non vide.

Alors:

$$\forall x \in H: \quad x \in C \Leftrightarrow \forall f \in H': \quad f(x) \leq \sup_{y \in C} f(y)$$

preuve du lemme:

L'implication $\Rightarrow$ est évidente.

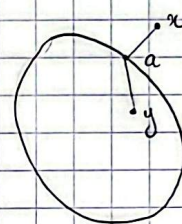
$\Leftarrow$: Soit $x \notin C$. Notons $a := p_C(x)$ la projection de x sur C .

Notons $f = \langle x - a, \cdot \rangle \in H'$.

$$\text{On a: } f(x - a) = \langle x - a, x - a \rangle = \|x - a\|^2 > 0 \quad \text{donc} \quad f(x) > f(a)$$

Or, par la caractérisation par l'angle obtu de a :

$$\forall y \in C: \quad f(y - a) = \langle x - a, y - a \rangle \leq 0 \quad \text{donc:} \quad f(y) \leq f(a) < f(x)$$



preuve du théorème:

B est convexe et contient $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ donc on a $\underbrace{\text{conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))}_{=: C} \subseteq B$

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact, donc, par le théorème de Carathéodory: C est compact, donc fermé.

C est donc un convexe compact non vide.

Soit $X \in B$, on veut mg $X \in C$. Par le lemme, il suffit de mg $\varphi(X) \leq \sup_{Y \in C} \varphi(Y) \quad \forall \varphi \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})^*$

Or, par linéarité de φ : $\sup_{Y \in C} \varphi(Y) = \sup_{Y \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \varphi(Y)$. On veut donc mg: $\varphi(X) \leq \sup_{Y \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \varphi(Y) \quad \forall \varphi \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})^*$

Soit $\varphi \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})^* \exists A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tq $\varphi = \text{tr}(A \cdot)$ (considérons $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{O}_n(\mathbb{R})^*$
 $A \mapsto \text{tr}(A \cdot)$)

Par la décomposition polaire, $\exists O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\exists S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = OS$.

On a $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ donc $\exists e_1, \dots, e_n$ une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres

$$\text{de } S. \quad \text{On a alors: } \varphi(X) = \text{tr}(XA) = \text{tr}(XOS) = \sum_{k=1}^n \langle XOS e_k, e_k \rangle = \sum_{k=1}^n \langle XO e_k, e_k \rangle$$

Donc:
$$\begin{aligned} Q(X) &= \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle Oek, {}^t X ek \rangle \\ &\leq \sum_{k=1}^n \lambda_k \|Oek\| \|{}^t X ek\| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \lambda_k \|Oek\| \|ek\| \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k \|Oek\| \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle Oek, Oek \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \langle Oek, Oek \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \langle {}^t O Oek, ek \rangle \\ &= \text{tr}({}^t O O) \\ &= Q({}^t O) \\ &\quad \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

par Cauchy-Schwarz.
car ${}^t X X = \|X\|^2 = 1$

no ce qui permet de conclure.
c'est un peu court donc on peut calculer les points extrémaux de $\mathcal{B}$. (Pren avec Krein-Milman).

Prop:

$\mathcal{E}_n(\mathcal{B}) = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

preuve:

On remarque tout d'abord que $\forall H \in \mathcal{B}$: $H \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 \leq 1, \|Hx\|_2 = 1)$.

* Soit $H \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$:

Soient $H_1, H_2 \in \mathcal{B}$ tq $H = tH_1 + (1-t)H_2$ avec $t \in]0,1[$.

Soit $\|x\|_2 = 1$:

$$1 = \|Hx\|_2 \leq \|tH_1x\|_2 + \|(1-t)H_2x\|_2 = t\|H_1x\|_2 + (1-t)\|H_2x\|_2 \leq t + (1-t) = 1$$

On a donc égalité partout et donc, par le cas d'égalité de l'I.T., qte à échanger

H_1 et H_2 : $\exists \lambda > 0$, $tH_1x = \lambda(1-t)H_2x$ no $H_1x = \frac{\lambda(1-t)}{t}H_2x$

De plus, par égalité, dans l'inégalité ②: $\|H_1x\|_2 = \|H_2x\|_2 = 1$.

On trouve donc $\frac{\lambda(1-t)}{t} = 1$ et donc: $H_1x = H_2x$.

Ceci vaut pour $\|x\|_2 = 1$ quelconque et donc $H_1 = H_2$ no $H = tH_1 + (1-t)H_2 = H_1$

no $H \in \mathcal{E}_n(\mathcal{B})$.

* Soit $H \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$: Par ce qu'on a fait: il y a un strict d'éléments de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ donc $H \notin \mathcal{E}_n(\mathcal{B})$.