

* Espaces de Bergman du disque unitaire: leçons 201, 205, 208, 213, 234, 245 (239, 243)

Soit $B^2(D) := H(D) \cap L^2(D)$ où D est le disque unitaire de $\mathbb{C}$. [Berns - Berns] 17

On munit $B^2(D)$ du p.s. induit par celui de $L^2(D)$ et on note en $z \mapsto \sqrt{\frac{2}{\pi}} z \in B^2(D)$

Alors:

1) $B^2(D)$ est un espace de Hilbert.

2) $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $B^2(D)$

3) On pose $K: D^2 \rightarrow \mathbb{C}$, on a alors:

$$(z, w) \mapsto \frac{1}{\pi(1 - z\bar{w})^2}$$

appel: mesure de Lebesgue sur $D \subset \mathbb{R}^2$.

$$\forall f \in B^2(D), \quad f = \int_D f(w) K(\cdot, w) d\lambda(w)$$

Lemme:

$\forall f \in B^2(D), \forall K \subseteq D$ compact.

$$\|f\|_{\infty} \leq \frac{1}{\pi d(K, D^c)} \|f\|_2$$

car la topo L^2 n'est pas fine que la topo univ.

preuve du lemme:

Soit $a \in K$ et r.o.t.q $\overline{D(a, r)} \subseteq D$

Par la formule de Cauchy: $f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D(a, r)} \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta \quad \forall 0 \leq r < 1$

Donc, par changement de variable polaire: (à justifier selon la leçon)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\partial D(a, r)} f(z) d\lambda(z) &= \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} \int_0^r f(a + \rho e^{i\theta}) \rho d\rho d\theta \\ &= \frac{2}{r^2} \int_0^r \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta}) \rho d\theta d\rho \\ &= \frac{2}{r^2} \int_0^r \rho d\rho \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta}) d\theta}_{= f(a)} \\ &= f(a) \cdot \frac{2}{r^2} \int_0^r \rho d\rho \\ &= f(a) \end{aligned}$$

$$\text{Donc: } |f(a)| \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{\partial D(a, r)} |f(z)| d\lambda(z) \leq \frac{1}{\pi r^2} \underbrace{\int_{\partial D(a, r)} |f(z)|^2 d\lambda(z)}_{\leq \|f\|_2^2}^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left| \int_{\partial D(a, r)} 1 d\lambda(z) \right|^{\frac{1}{2}}}_{= \sqrt{\pi r^2}}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} r} \|f\|_2$$

Dev. tra. 4.

Donc, en faisant tendre r vers $d(a, D^c)$, on trouve:

$$\|f(a)\| \leq \frac{1}{r d(a, D^c)} \|f\|_2 \leq \frac{1}{r d(a, D^c)} \|f\|_2$$

$$\text{Donc: } \|f\|_{\infty} \leq \frac{1}{r d(a, D^c)} \|f\|_2$$

preuve du théorème:

1) $B^2(D)$ est un espace préhilbertien, il nous reste à montrer qu'il est complet.

Soit (f_n) de Cauchy dans $B^2(D)$.

Par définition de la norme sur $B^2(D)$, (f_n) est de Cauchy dans $L^2(D)$.

Ainsi, $\exists g \in L^2(D)$ tq $\|f_n - g\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (Riesz-Fischer).

Or, par le lemme, (f_n) est également de Cauchy dans $\mathcal{H}(D)$ pour la topo usuelle (induite par L^2).

qui est un espace complet donc: $\exists f \in \mathcal{H}(D)$, $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$.

Or, $f_n \xrightarrow{L^2} g$ donc, $\exists \epsilon: \forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n - g\|_2 < \epsilon$.

Ainsi $f = g$ p.s. donc $f \in L^2(D)$.

Donc $f \in B^2(D)$ donc $B^2(D)$ est bien complet.

$$\begin{aligned} 2) \langle e_n, e_m \rangle &= \frac{n+1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} z^n \bar{z}^m dz \\ &= \frac{n+1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{n+m} e^{i(n-m)\theta} r dr d\theta \\ &= \frac{n+1}{\pi} \int_0^1 r^{n+m+1} dr \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta \\ &= \frac{n+1}{\pi(n+m+2)} \times 2\pi \delta_{n=m} \\ &= \frac{2\pi(n+1)}{\pi(2n+2)} \delta_{n=m} \\ &= \delta_{n=m} \end{aligned}$$

Soit $f \in B^2(D)$: Par Parseval: $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 r^{2n}$ (où $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ $\forall z \in D$)

$$\Rightarrow \|f\|_2^2 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 r d\theta dr = \int_0^1 \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 r^{2n+1} dr = 2\pi \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 \int_0^1 r^{2n+1} dr = \frac{\pi}{n+1} \sum_{n \geq 0} |a_n|^2$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{\frac{n+1}{\pi}} a_n \right) \in \ell^2(\mathbb{N})$$

$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n z^n = \sum_{n \geq 0} \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} a_n \frac{z^n}{\sqrt{n+1}}$ converge dans L^2 vers f (comme au début pour justifier ce dernier énoncé)

$\leadsto (e_n, n \geq 0)$ est bien totale

3). Soit $z \in \mathbb{D}$.

On pose $f_z: \mathcal{B}^2(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{C}$ qui est $\mathcal{C}^\infty$ par le lemme.
 $f \mapsto f(z)$

on $\exists k_z \in \mathcal{B}^2(\mathbb{D})$ tq $f_z = \langle \cdot, k_z \rangle$ (représentat. de Riesz)

$$\text{i.e. } \forall f \in \mathcal{B}^2(\mathbb{D}): f(z) = \langle f, k_z \rangle.$$

On pose: $K: \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{C}$
 $(z, w) \mapsto \overline{k_z(w)}$

$$\begin{aligned} k_z \in \mathcal{B}^2(\mathbb{D}) \text{ donc. } k_z &= \sum_{n \geq 0} \langle k_z, e_n \rangle e_n \\ &= \sum_{n \geq 0} e_n(z) e_n \\ &= \sum_{n \geq 0} \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \bar{z}^n e_n \end{aligned}$$

$$\text{Et donc. } K(z, w) = \sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{\pi} z^n \bar{w}^n = \sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{\pi} (z \bar{w})^n = \frac{1}{\pi(1 - z \bar{w})^2} \quad (\text{série dérivée de } \sum_{n \geq 0} z^n)$$