

On note $W := \{f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|f\|_W := \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < \infty\}$

1) $W \subseteq \mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}$ et : $\forall f \in W, f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$

2) $(W, +, \cdot, x, \|\cdot\|_W)$ est une algèbre de Banach et $\theta: W \rightarrow \ell^1(\mathbb{Z})$ est un

$$f \mapsto (c_n(f))$$

isomorphisme isométrique d'algèbres de Banach (la loi de multiplication sur $\ell^1(\mathbb{Z})$ est la convolution : $(u * v)_n = \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j v_{n-j}$).

3) $\forall f \in W: \|f - S_N(f)\|_W \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ où $S_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx}$

4) les inclusions $(\mathcal{C}^1_{\mathbb{R}}, \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}) \hookrightarrow (W, \|\cdot\|_W) \hookrightarrow (\mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}, \|\cdot\|_{\mathcal{C}^0})$ sont continues.

5) (Théorème de Wiener) Soit $f \in W$ ne s'annulant pas. Alors, $\frac{1}{f} \in W$. (i.e. W est une sous-algèbre lisse de $\mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}$)

preuve:

1) Soit $f \in W$.

$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$ est une série absolument convergente dans $\mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}$ et donc converge uniformément vers $g \in \mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}$.

Par continuité des coefficients de Fourier, on a : $\forall n \in \mathbb{Z}: c_n(g) = c_n(f)$.

Ainsi, par injectivité des coefficients de Fourier dans $L^1_{\mathbb{R}}$, on a :

$$f = g \quad \text{p.p.}$$

Ainsi, ops $f = g \in \mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}$ et on a bien $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$

2) Par construction de $\|\cdot\|_W$, θ est une isométrie.

$$\text{Posons } \Phi: \ell^1(\mathbb{Z}) \rightarrow W \\ a_n \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{inx}$$

Par ce qu'on a dit dans 1), Φ est bien défini, c'est une isométrie et on a :

$$\Phi \circ \theta = \text{id}_W \quad \text{et} \quad \theta \circ \Phi = \text{id}_{\ell^1(\mathbb{Z})}$$

$$\begin{aligned} \text{De plus, par Fubini-Tonelli, on a: } \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |a_m| |b_{n-m}| &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} |a_m| \sum_{n \in \mathbb{Z}} |b_{n-m}| \\ &= \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} |a_m| \right) \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |b_n| \right) < \infty. \end{aligned}$$

Donc, par Fubini :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m e^{imx} \right) \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n e^{inx} \right) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_m b_n e^{imx} e^{inx} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_m b_{n-m} e^{imx} e^{i(n-m)x} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m b_{n-m} \right) e^{inx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (a * b)_n e^{inx} \end{aligned}$$

Ainsi, Θ et Φ sont des isomorphismes isométriques d'algèbres.

En particulier, comme $\ell^1(\mathbb{Z})$ est une algèbre de Banach, il en est de même

pour W .

3) C'est immédiat par ce qu'on a fait dans 1) (pas vraiment en fait)

4) * Continuité de $W \hookrightarrow C_{2\pi}^1$:

$$\begin{aligned} \text{Soit } f \in W. \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}: |f(n)| &= \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{ikn} \right| \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)| e^{kn} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)| = \|f\|_W. \end{aligned}$$

* Continuité de $C_{2\pi}^1 \hookrightarrow W$:

Soit $f \in C_{2\pi}^1$:

$$\begin{aligned} \text{Une I.P. donne: } c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{c_n(f')}{in} \quad \forall n \neq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Donc: } \|f\|_W = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{|c_n(f')|}{n} + |c_0(f)|$$

$$\begin{aligned} &\leq \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{n^2}} \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f')|^2} + \|f\|_\infty \quad \text{par Cauchy-Schwarz} \\ &= k \|f'\|_{L^2_{2\pi}} + \|f\|_\infty \quad \text{par Parseval} \\ &\leq k \|f'\|_\infty + \|f\|_\infty \end{aligned}$$

5) Soit $f \in W$ ne s'annulant pas.

$|f|$ est continue sur le compact $[0, 2\pi]$ donc $|f|$ atteint un minimum $m > 0$.

On va remplacer f par $\frac{f}{m}$, ops $m \geq 1$: $\forall x \in \mathbb{R}: |f(x)| \geq 1$

Par 3), on peut considérer $N \in \mathbb{N}$ tq $g := S_N(f)$ vérifie $\|f - g\|_W \leq \frac{1}{3}$

En particulier, $g \in C_{2\pi}^1$ et $\forall x \in \mathbb{R}: |g(x)| = |f(x) - f(x) + g(x)|$

$$\geq |f(x)| - |f(x) - g(x)|$$

$$\geq \frac{2}{3}$$

Ainsi, $\frac{1}{g}$ est bien déf., $\in C_{2\pi}^1$ et $\|\frac{1}{g}\|_\infty \leq \frac{3}{2}$.

* d.l.q $\frac{g}{f} \in W$:

On va montrer que $\sum (1 - \frac{f}{g})^n$ converge absolument dans W .

$$\|1 - \frac{f}{g}\|_W = \left\| \frac{g-f}{g} \right\|_W$$

$$\leq \|g-f\|_W \times \left\| \frac{1}{g} \right\|_W$$

par 2)

$$\leq \frac{1}{3^n} \times k \left\| \frac{1}{g} \right\|_{C^2}$$

par 4)

Or, $\forall n \in \mathbb{N}: \frac{1}{|g(x)|^n} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n$ donc $\left\| \frac{1}{g^n} \right\|_\infty \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n$

De plus, $\left(\frac{1}{g^n}\right)' = n \left(-\frac{g'}{g^2}\right) \times \frac{1}{g^{n-1}}$
 $= -\frac{ng'}{g^{n+1}}$

Donc: $\left\| \left(\frac{1}{g^n}\right)' \right\|_\infty \leq n \|g'\|_\infty \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$

Ainsi: $\left\| \frac{1}{g^n} \right\|_{C^1} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(1 + \frac{3n}{2} \|g'\|_\infty\right)$

et donc: $\left\| 1 - \frac{f}{g} \right\|_W \leq \frac{k}{2^n} \left(1 + \frac{3n}{2} \|g'\|_\infty\right)$

Ainsi, $\sum_{n \geq 0} \left\| 1 - \frac{f}{g} \right\|_W < +\infty$ et donc, comme W est un Banach:

$\sum_{n \geq 0} \left(1 - \frac{f}{g}\right)^n$ converge vers $h \in W$.

Or, $\left(1 - \frac{f}{g}\right)h = \sum_{n \geq 1} \left(1 - \frac{f}{g}\right)^n$ donc: $\frac{f}{g}h = h - \sum_{n \geq 1} \left(1 - \frac{f}{g}\right)^n = 1$

Donc: $h = \frac{g}{f} \in W$.

Or, $\frac{1}{g} \in C_{2\pi}^1 \subseteq W$ donc $\frac{1}{f} = \frac{g}{f} \frac{1}{g} \in W$.