

* Ellipsoïde de John-Lewyner: 149, 157, 171, 181, 203, 219, 229, 258

[Bernis Bernis], 39

Soient $q \in Q(\mathbb{R}^n)$ et $C \in \mathbb{R}^n$. On note $E_{q,C} := \{X \in \mathbb{R}^n, q(X-C) \leq 1\}$ l'ellipsoïde (plein) associée à q centrée en C . * définie positive.

Soit $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compact d'intérieur non vide, alors:

1) À C fixé, $\exists!$ $q \in Q(\mathbb{R}^n)$ ^{def. pos.}, $K \subseteq E_{q,C}$ et $E_{q,C}$ de volume minimal.

2) Il existe une unique ellipsoïde contenant K de volume minimal (centre non fixé).

On notera également $E_q = E_{q,0}$ et on prendra la notation aux $q \in Q(\mathbb{R}^n)$ positives

(non nécessairement définies). On remarque grâce à l'inégalité triangulaire par la semi-norme $\sqrt{q}$

que $E_{q,C}$ est convexe. On a de plus (petit calcul): $E_q \subseteq E_{q'} \Leftrightarrow q' \leq q$ et donc

$E_q = E_{q'} \Leftrightarrow q' = q$, en particulier: E_q détermine uniquement q .

preuve:

1) Ops $C=0$ quitte à faire une translation.

Par le théorème de diagonalisation simultanée, $\exists \beta$ bon de $\mathbb{R}^n$ par le p.s. can qui est orthogonale pour q : $M := \text{mat}_\beta(q) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$ (q est def. pos.)

On note $X = (x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées dans la base β

$$\text{On a: } X \in E_q \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (\lambda_i x_i^2) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{\lambda_1} x_1, \dots, \sqrt{\lambda_n} x_n) \in \bar{B}(0,1)$$

car β bon

Ainsi, $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est en isomorphisme linéaire de déterminant $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \dots \lambda_n}} = \frac{1}{\sqrt{\det(M)}}$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\frac{x_1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, \frac{x_n}{\sqrt{\lambda_n}} \right)$$

qui envoie $\bar{B}(0,1)$ sur E_q

Donc, par CDV linéaire:

$$\text{Vol}(E_q) = \int_{E_q} 1 \, dy_1 \dots dy_n$$

$$= \int_{\bar{B}(0,1)} \frac{1}{\sqrt{\det(M)}} \, dx_1 \dots dx_n$$

$$= \frac{\text{Vol}(\bar{B}(0,1))}{\sqrt{\det(M)}}$$

Par ailleurs, $\det(M) = \det(\text{mat}_\beta(q))$ où β est une base quelconque, en particulier, on a:

$\text{Vol}(E_q) = \frac{\text{Vol}(\bar{B}(0,1))}{\sqrt{\det(E_q)}}$ où $E_q \in S_n^+(\mathbb{R})$ est la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

⊗ On est donc amené à maximiser $\det(S)$ sur $\{S \in S_n^+(\mathbb{R}), \forall X \in K: {}^tXSX \leq 1\}$

Posons $\mathcal{C} := \{S \in S_n^+(\mathbb{R}), \forall X \in K: {}^tXSX \leq 1\}$, qui a l'avantage d'être fermé par rapport à l'ensemble précédent, comme on va le voir.

* d'q $\mathcal{C}$ est compact:

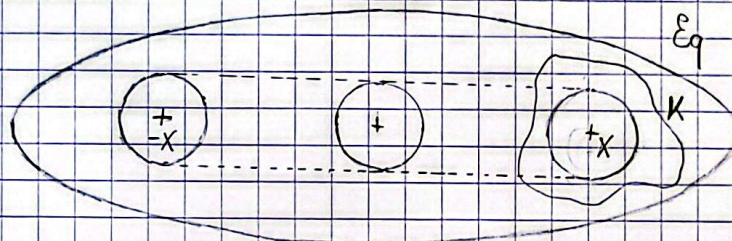
• $\mathcal{C} = \bigcap_{X \in K} \{S \in S_n^+(\mathbb{R}), {}^tXSX \leq 1\}$ et $S \mapsto {}^tXSX$ est continue donc $\mathcal{C}$ est fermé.

• Soit $S \in \mathcal{C}$:

Par définition: $K \subseteq E_q$, or K est d'intérieur non vide donc $\exists X \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0$ tq $\bar{B}(X, \varepsilon) \subseteq K \subseteq E_q$.

Par ailleurs, E_q est stable par la symétrie centrale par rapport à 0 donc: $-\bar{B}(X, \varepsilon) = \bar{B}(-X, \varepsilon) \subseteq E_q$.

Comme E_q est convexe, on a $\text{conv}(\bar{B}(X, \varepsilon) \cup \bar{B}(-X, \varepsilon)) \subseteq E_q$ et donc: $\bar{B}(0, \varepsilon) \subseteq E_q$.



Soit alors $\forall \varepsilon \in \bar{B}(0, 1)$, on a $\varepsilon \in \bar{B}(0, \varepsilon)$ et donc:

$$\varepsilon^2 {}^t\varepsilon S \varepsilon \leq 1, \text{ i.e.: } {}^t\varepsilon S \varepsilon \leq \frac{1}{\varepsilon^2}$$

En diagonalisant S dans une base β , on en déduit: $\ell(S) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}$

Si on note alors $(y_1, \dots, y_n)$ les coordonnées de Y dans β et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les vp de S ,

on a:

$$SY = (\lambda_1 y_1, \dots, \lambda_n y_n) \text{ et donc: } \|SY\|^2 = \sum_{i=1}^n (\lambda_i y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n \ell(S)^2 y_i^2 = \ell(S)^2 \|Y\|^2 \leq \frac{1}{\varepsilon^4} \|Y\|^2$$

Donc: $\|SY\| \leq \frac{1}{\varepsilon^2}$

Ainsi: $\mathcal{C}$ est borné.

• K est borné donc $K \subseteq \bar{B}(0, M)$ pour un certain $M > 0$.

Alors, $\forall X \in K: {}^tX \left(\frac{1}{M^2} I_n \right) X = \frac{1}{M^2} \|X\|^2 \leq 1$, donc: $\frac{1}{M^2} I_n \in \mathcal{C}$.

Ainsi $\mathcal{C} \cap S_n^+(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

→ Ainsi, comme $\det$ est continue, elle admet un maximum sur le compact non vide

K . Soit S réaliser ce maximum. On a $\frac{1}{M^2} I_n \in \mathcal{C}$ donc $\det(S) \geq \det\left(\frac{1}{M^2} I_n\right) > 0$.

Donc $S \in S_n^+(\mathbb{R})$.

* d/q le maximum est atteint en un unique point.

Supposons par l'absurde qu' $\exists S_1, S_2 \in \mathcal{C}$ maximaux det.

On montre sans difficultés que $\mathcal{C}$ est convexe et donc $\frac{S_1+S_2}{2} \in \mathcal{C}$.

On a $S_1, S_2 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ donc, par diagonalisation simultanée:

$\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$, $\exists P_1 = S_1$ et $S_2 = PDP$ où $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$, non tous égaux à 1.

$$\begin{aligned} \text{On a alors: } \det(S_1) &= \det(S_1) \det(S_2) \\ &= \det(P)^2 \det(D) \end{aligned}$$

$$\text{et } \det\left(\frac{S_1+S_2}{2}\right) = \det(D)^2 \det\left(\frac{I_n+D}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Or: } \ln \det\left(\frac{I_n+D}{2}\right) &= \ln \left(\prod_{i=1}^n \frac{1+\lambda_i}{2} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{1+\lambda_i}{2} \right) \\ &\geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (\ln(1) + \ln(\lambda_i)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \ln(\lambda_i) \\ &= \ln(\sqrt{\lambda_1 \dots \lambda_n}) \\ &= \ln(\sqrt{\det(D)}) \end{aligned}$$

car $\ln$ est st concave et l'un au moins des λ_i est > 1

Donc, par stricte croissance de $\ln$: $\det\left(\frac{I_n+D}{2}\right) > \sqrt{\det(D)}$, et donc:

$$\det(S_1) < \det\left(\frac{S_1+S_2}{2}\right), \text{ ce qui contredit la maximalité de } S_1$$

2)

* Existence:

Pour $C \in \mathbb{R}^n$, on notera $\mathcal{E}_C$ l'ellipsoïde de John-Louwer associé à K de centre C .

Soit $\mathcal{E}_{q,C}$ une ellipsoïde centrée en C quelconque, $\beta = (e_i)_{i=1}^n$ une base de $\mathbb{R}^n$ orthogonale pour q et $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \text{mat}_\beta(q)$. On montre facilement que le grand axe dans la direction de e_i est de longueur $2a_i$ où $a_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$. Ainsi le volume de $\mathcal{E}_{q,C}$ est exactement $\text{Vol}(\mathcal{B}(0,1)) a_1 \dots a_n$ (En dimension 2: $\text{area} = \pi ab$)

Sont alors $M > 0$ tq $K \in \mathcal{B}(0, M)$, $R > 0$ et $C \notin \mathcal{B}(0, M+R)$.

Notons $a_1, \dots, a_n$ les longueurs des demi-grands axes de $\mathcal{E}_C$, rangés par ordre croissant.

On a $d(K, C) \geq R$ donc $d(K, \mathcal{E}_C(K)) \geq 2R$ où $\mathcal{E}_C$ est la symétrie centrale de centre C . Or, $\mathcal{E}_C$ est stable par $\mathcal{E}_C$ donc: $2a_n = \text{diam}(\mathcal{E}_C) \geq 2R \Rightarrow a_n \geq R$.

Par ailleurs, on montre comme dans 1) qu' $\exists \varepsilon > 0$ tq $\tilde{\mathcal{E}}(C, \varepsilon) \in \mathcal{E}_C$.

On a alors $a_i \geq \varepsilon$, et donc: $\text{Vol}(\mathcal{E}_L) = \text{Vol}(\tilde{\mathcal{B}}(0,1)) a_1 \dots a_n$

$$\geq \text{Vol}(\tilde{\mathcal{B}}(0,1)) R \varepsilon^{n-1}$$

$$\geq \text{Vol}(\tilde{\mathcal{B}}(0,1)) \quad \text{pour } R \gg 1$$

$$\geq \text{Vol}(\mathcal{E}_L)$$

$\leadsto$ Ainsi, on a: $\inf \{ \text{Vol}(\mathcal{E}_L), C \in \mathbb{R}^n \} = \inf \{ \text{Vol}(\mathcal{E}_L), C \in \tilde{\mathcal{B}}(0, H+R) \} =: V_m$

Par compacité de $\tilde{\mathcal{B}}(0, H+R)$, $\exists (C_n) \in (\tilde{\mathcal{B}}(0, H+R))^n$ tq $C_n \rightarrow C \in \tilde{\mathcal{B}}(0, H+R)$ et $\text{Vol}(\mathcal{E}_{L_n}) \rightarrow V_m$

Soit alors $\varepsilon > 0$ et $N > 0$ tq $n \geq N \Rightarrow \text{Vol}(\mathcal{E}_{L_n}) \leq V_m + \varepsilon$.

Soit $n \geq N$.

Notons $\mathcal{E}_{L_n} = \mathcal{E}_{q_n, c_n}$ et soit $\delta > 1$.

$$\forall x \in K: \sqrt{\frac{q_n}{\delta}}(x-c) = \sqrt{\frac{q_n}{\delta}}(x-c_n + c_n - c)$$

$$\leq \sqrt{\frac{q_n}{\delta}}(x-c_n) + \sqrt{\frac{q_n}{\delta}}(c_n - c) \quad \text{par l'I.T. pour la norme } \sqrt{\frac{q_n}{\delta}}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{\delta}} + \sqrt{q_n}(c_n - c) \quad \text{car } K \subseteq \mathcal{E}_{q_n, c_n}$$

$$\leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}_{< 1} + \alpha d(c_n, c) \quad \text{où } \alpha > 0 \text{ est une cte donnée par l'équivalence des normes } \sqrt{q_n} \text{ et } \|\cdot\|$$

$$\leq 1 \quad \text{quitte à augmenter } \delta$$

$$\text{Donc: } K \subseteq \mathcal{E}_{q_n, c}$$

$$\text{On en déduit: } \text{Vol}(\mathcal{E}_L) \leq \text{Vol}(\mathcal{E}_{q_n, c})$$

$$= \delta^{n/2} \text{Vol}(\mathcal{E}_{q_n, c_n})$$

$$\leq \delta^{n/2} (V_m + \varepsilon)$$

En faisant $\delta \rightarrow 1$ puis $\varepsilon \rightarrow 0$, on trouve: $\text{Vol}(\mathcal{E}_L) \leq V_m$ et donc $\text{Vol}(\mathcal{E}_L) = V_m$

* Unité:

Si $\mathcal{E}_{q_1, c_1}$ et $\mathcal{E}_{q_2, c_2}$ sont deux ellipses de volumes minimaux, alors $\{x \in \mathbb{R}^n, \frac{1}{2}q_1(x-c_1) + \frac{1}{2}q_2(x-c_2) \leq 1\}$

est une ellipse de la forme $\mathcal{E}_{\frac{1}{2}q_1 + \frac{1}{2}q_2}$

On conclut alors de la même manière que dans 1).