

* Fibonacci aléatoire : dégens 223, 226, 226, 230, 235, 261, 262, 264, 266

[Boris Berns] 25

Soient $(p_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et (Y_n) une suite de v.a. indép. tq $Y_n \sim \mathcal{B}(1/2, p_n)$.

Soit (U_n) la suite de v.a. déf. par :

$$\begin{cases} U_{n+2} = U_{n+1} + Y_n U_n & \forall n \in \mathbb{N} \\ U_0 = U_1 = 1 \end{cases}$$

(i) Si $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = +\infty$, alors $U_n \xrightarrow{p.s.} +\infty$.

(ii) Soit $f: x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ et (a_n) la suite déterministe définie par $\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) \\ a_0 = 1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Si (p_n) est égale à $p \in \mathbb{R}^+$, alors $\frac{1}{n} \ln(U_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \sum_{i=0}^{\infty} \ln(a_i) (1-p)^i$

De plus : $\sum_{i=0}^{\infty} \ln(a_i) (1-p)^i \xrightarrow[p \rightarrow 1^-]{} \ln(\varphi)$ où $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or.

preuve :

On commence par traiter le cas de la suite de Fibonacci déterministe : $\begin{cases} U_{n+2} = U_{n+1} + U_n \\ U_0 = U_1 = 1 \end{cases}$

On a $X^2 - X - 1 = (X - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4} = (X - \varphi)(X - (1-\varphi))$, donc : $\exists a, b \in \mathbb{R}, u_n = a\varphi^n + b(1-\varphi)^n$

L'évaluation en $n=0$ donne $b = 1-a$ et en $n=1$ donne : $1 = a\varphi + (1-a)(1-\varphi)$, ce qui donne :

$$a = \frac{\varphi}{2\varphi-1} = \frac{\varphi}{\sqrt{5}} \rightsquigarrow u_n = a\varphi^n + (1-a)(1-\varphi)^n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} a\varphi^n \quad (\text{car } \varphi > 1 \text{ et } -1 < 1-\varphi < 0).$$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{n} \ln(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ln(\varphi).$$

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y_n = 1) = +\infty$. Or, les événements $\{Y_n = 1\}$ sont mutuellement indép., donc, par B.C.L. :

$\mathbb{P}(\limsup \{Y_n = 1\}) = 1$ i.e. : p.s., Y_n vaut 1 pour une infinité de n .

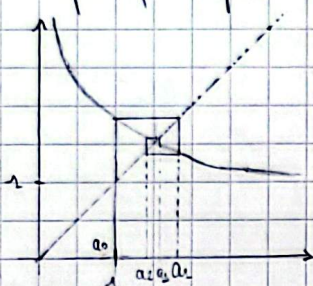
Or, (U_n) est p.s. croissante donc $U_n \geq 1$ p.s. Ainsi, p.s., $U_{n+2} - U_{n+1} = Y_{n+1} U_n \geq 1$ pour une note de n .
Donc, p.s., (U_n) ne converge pas, donc, $U_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$.

(ii). On suppose donc $p_0 = p \in]0, 1[$ $\forall n \in \mathbb{N}$

• On commence par étudier (a_n) .

• $f([1, 2]) = [\frac{1}{2}, 2] \subseteq [1, 2]$ donc (a_n) est bien def. à valeurs dans $[1, 2]$.

• $f \searrow$ donc (a_n) et (a_{n+1}) sont monotones (de monotonies opposées). Elles sont bornées donc convergent vers un point fixe de $f \circ f$. Or, $\forall x > 0$: $x = f \circ f(x) \Leftrightarrow x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{x}{x}}$ $\Leftrightarrow x = \frac{2x+1}{x+1} \Leftrightarrow x^2 = x+1$.
Ainsi, l'unique point fixe de $f \circ f$ dans $[1, 2]$ est 1 donc: $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$.



• On va maintenant prouver le point principal du théorème. Pour ça on introduit la suite (V_n) définie par $V_n := \frac{U_{n+1}}{U_n}$ (bien def car $U_n \geq 1$).

On vérifie la relation de récurrence: $V_{n+1} = \frac{U_{n+2}}{U_{n+1}} = \frac{U_{n+1} + Y_{n+1} U_n}{U_{n+1}} = 1 + \frac{Y_{n+1}}{V_n} = g(V_n, Y_{n+1})$

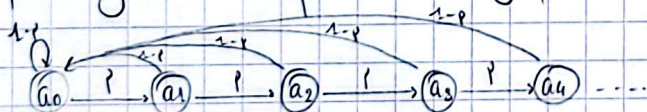
avec $g: E \times \{0, 1\} \rightarrow E$ et $E = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 1\}$
 $(x, y) \mapsto 1 + \frac{y}{x}$

H.P. Or, en notant $\tilde{\mathcal{F}}_n = \sigma(Y_0, \dots, Y_{n-1})$, on voit que V_n est $\tilde{\mathcal{F}}_n$ -mesurable. Ainsi, (V_n) est une chaîne de Markov pour la filtration $(\tilde{\mathcal{F}}_n)_{n \geq 0}$, à valeurs dans E .

Plus précisément: $\forall n \in \mathbb{N}$: $P(V_{n+1} = a_{n+1} | V_n = a_n) = p$ et $P(V_{n+1} = a_0 | V_n = a_n) = 1 - p$. On note P

sa matrice de transition: $P = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 \\ 1-p & 0 & 0 & p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$

On peut également représenter son graphe de transition:



(V_n) est donc irréductible, montrons qu'elle est récurrente positive. On cherche π une mesure de proba. invariante: $\pi P = \pi \Leftrightarrow \forall n \geq 1$: $\pi(a_n) = p \pi(a_{n-1})$ et $\pi(a_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \pi(a_k) (1-p) = (1-p) \Leftrightarrow \forall n$: $\pi(a_n) = p^n (1-p)$
 $\pi(E) = 1$

la mesure π est bien une mesure de proba donc (V_n) est bien récurrente positive de mesure de proba. invariante π .

le théorème ergodique des chaînes de Markov nous permettrait alors de conclure:

$$\frac{1}{n} h(V_n) = \frac{1}{n} (h(V_n) - h(V_0)) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h(V_k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \sum_{i=0}^{\infty} h(a_i) \pi(a_i) = \sum_{i=0}^{\infty} h(a_i) p^{i+1} (1-p)$$

le théorème n'étant pas au programme, on se propose de montrer la convergence p.s. à la main.

On pose: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $N_n := \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i = a_0\}}$: le nb. de retour en a_0 entre les instants 1 et n .

On a: $N_n = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{V_i = a_0\}}$ et donc, par la LFGN: $\frac{1}{n} N_n \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{V_0 = a_0\}}] = 1-p$. (1)

(En particulier: $N_n \xrightarrow{p.s.} +\infty$).

On pose: $(T^{(r)})_{r \geq 0}$ la suite de v.a. (temps d'arrêt) définies par:
$$\begin{cases} T^{(r+1)} = \inf \{n > T^{(r)}, V_n = a_0\} \\ T^{(0)} = 0. \end{cases}$$

$\leadsto T^{(r)}$ est le temps de r -ième retour en a_0 .

Par ce qu'on a dit juste avant, on a: $\forall r \in \mathbb{N}$, $T^{(r)} < T^{(r+1)} < +\infty$ p.s.

On pose $D_r := T^{(r)} - T^{(r-1)}$ $\forall r \geq 1$ (le temps de la r -ième excursion en dehors de a_0).

On dit que les D_r sont iid. de loi $\mathcal{G}(1-p)$.

$$\forall j, k: P(D_r = k | T^{(r-1)} = j) = P(Y_j = \dots = Y_{j+k-1} = 1, Y_{j+k} = 0) = (1-p)p^{k-1}$$

Donc: $\forall k \geq 1$, $P(D_r = k) = (1-p)p^{k-1}$, ce qui donne bien $D_r \sim \mathcal{G}(1-p)$

Soient $i_1, \dots, i_k \in (\mathbb{N}^*)^k$ et $s_r := \sum_{j=1}^{i_r} j$

$$\text{On a: } \prod_{r=1}^k P(D_r = i_r) = \prod_{r=1}^k \left(\prod_{j=0}^{i_r-1} P(Y_{s_r+j} = 1) \right) P(Y_{s_r+i_r} = 0)$$

$$\begin{aligned} \text{Donc, par indep. des } Y_j: \quad P\left(\prod_{r=1}^k \{D_r = i_r\}\right) &= \prod_{r=1}^k \left(\prod_{j=0}^{i_r-1} P(Y_{s_r+j} = 1) \right) P(Y_{s_r+i_r} = 0) \\ &= \prod_{r=1}^k (1-p)p^{i_r-1} \\ &= \prod_{r=1}^k P(D_r = i_r) \end{aligned}$$

$\leadsto$ Les D_r sont bien indep.

preuve du théorème ergodique:

$$\text{On a: } \sum_{i=T^{(r-1)}}^{T^{(r)}-1} h(V_i) = \sum_{i=0}^{D_r-1} h(a_i)$$

$$\text{Ainsi: } \sum_{i=0}^{T^{(n)}-1} h(V_i) = \sum_{r=1}^n \underbrace{\sum_{i=0}^{D_r-1} h(a_i)}_{=: z_r}$$

(Z_r) est une suite de v.a. iid positives.

De plus, $Z_r = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i a_i \mathbb{1}_{\{D_r \geq i+1\}}$, donc:
$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_r] &= \sum_{i=0}^{+\infty} p_i a_i \mathbb{P}(D_r \geq i+1) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} p_i a_i p^i \\ &\leq p a(1) \sum_{i=0}^{+\infty} p^i = \frac{p a(1)}{1-p} < +\infty \end{aligned}$$

Donc, par la LFGN:
$$\frac{1}{n} \sum_{r=1}^n Z_r \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}[Z_1] = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i a_i p^i$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{+\infty} p_i(V_i)$$

Or, on a vu que $N_n \xrightarrow{p.s.} +\infty$, donc

$$\frac{1}{N_n} \sum_{i=0}^{N_n-1} p_i(V_i) \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}[Z_1]$$

$$p_i a_i \leq p_i(V_i) \leq p_i a_i + \varepsilon$$

Or: $T^{(N_n)} \leq n < T^{(N_n+1)}$, donc:
$$\frac{1}{N_n} \sum_{i=0}^n p_i(V_i) \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}[Z_1]$$

Or, par (1): $\frac{N_n}{n} \xrightarrow{p.s.} 1-p$ donc
$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n p_i(V_i) \xrightarrow{p.s.} (1-p) \mathbb{E}[Z_1]$$

On trouve bien:
$$\frac{1}{n} p_n(V_n) \xrightarrow{p.s.} \sum_{i=0}^{+\infty} p_i a_i (1-p) p^i$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $r \geq 1$ tq $i \geq r \Rightarrow |p_i a_i - p_i(V_i)| \leq \varepsilon$.

On a:

$$\begin{aligned} \limsup_{p \rightarrow 1^-} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} p_i a_i (1-p) p^i \right) - \varepsilon &= \limsup_{p \rightarrow 1^-} \sum_{i=0}^{+\infty} (p_i a_i - \varepsilon) (1-p) p^i = \limsup_{p \rightarrow 1^-} \sum_{i=r}^{+\infty} (p_i a_i - \varepsilon) (1-p) p^i \leq \limsup_{p \rightarrow 1^-} \sum_{i=r}^{+\infty} p_i a_i (1-p) p^i \\ &= \limsup_{p \rightarrow 1^-} p^r p_i a_i = p^r p_i a_i = \liminf_{p \rightarrow 1^-} \sum_{i=r}^{+\infty} p_i a_i (1-p) p^i \leq \liminf_{p \rightarrow 1^-} \sum_{i=r}^{+\infty} (p_i a_i + \varepsilon) (1-p) p^i = \left(\liminf_{p \rightarrow 1^-} \sum_{i=0}^{+\infty} p_i a_i (1-p) p^i \right) + \varepsilon \end{aligned}$$

En faisant $\varepsilon \rightarrow 0$, on trouve bien:
$$\sum_{i=0}^{+\infty} p_i a_i (1-p) p^i \xrightarrow{p \rightarrow 1^-} p_i a_i$$