

Leçon 266 : Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités.

Matei Lefebvre

2025/2026

1 Notion d'indépendance.

1.1 Probabilités conditionnelles, événements indépendants.

[CR16], I.3

~ 8 items.

définition probabilité conditionnelle | formule des probabilités totales | formule de Bayes | définition famille (quelconque) d'événements indépendants | exemple : 2 à 2 indépendants mais pas mutuellement indépendants | indép ssi $\mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_n) = \mathbb{P}(B_1) \dots \mathbb{P}(B_n)$ pour tout choix des $B_i \in \{\Omega, A_i, A_i^c\}$ | lemme de Borel-Cantelli | application à la convergence p.s. (IV.1)

1.2 Indépendance de variables aléatoires.

[CR16], II.2 et II.4-5 et [App24], II.2

~ 8 items.

définition famille (quelconque) de tribus indépendantes | définition tribu engendrée par une v.a. | définition variables aléatoires indépendantes | exemple : lancés de pièce | lemme des coalitions | définition loi conjointe/loi marginale | trouver les lois marginales à partir de la loi conjointe dans les cas discret/à densité | caractérisation indépendance par la loi du couple

2 Utilisation de la notion d'indépendance.

2.1 Calcul des moments.

[CR16], III.4

~ 5 items.

$X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ | définition covariance, lien avec la variance | $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0$, réciproque fausse | contre-exemple | variance d'une somme, cas des variables décorrélées

2.2 Stabilité des lois, fonctions caractérisant la loi.

[CR16], III.5-6, [App24], IX.2 et XI.3.h

~ 11 items.

binomiale = somme de Bernoulli indépendantes, somme de binomiales indépendantes | fonction génératrice d'une somme indépendante | exemple : somme de Poissons | fonction génératrice d'une somme d'un nombre aléatoire de v.a. indépendantes | exemple : $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $X_n \sim \mathcal{B}(p)$ | somme de loi exponentielles indépendantes | définition loi Gamma | définition loi du χ^2 , lien avec les sommes

de carrés de Gaussiennes | fonction caractéristique d'une somme indépendante | exemple : somme de gaussiennes indépendantes (Appel) | caractérisation de l'indépendance par la fonction caractéristique du couple

3 Suites et séries de variables indépendantes.

3.1 Généralités.

[App24], XIV.2

~ 7 items.

définition tribu asymptotique | loi du 0 – 1 de Kolmogorov | application : marche aléatoire p.s. non majorée et non minorée | corollaire : marche sur $\mathbb{Z}$ est récurrente | application aux séries entières aléatoires | (théorème des deux séries) | DEV 1 : Fibonacci aléatoire

D1

Théorème. Soient $(p_n) \in]0; 1[^\mathbb{N}$ et (Y_n) une suite de variables aléatoire indépendantes telles que $Y_n \sim \mathcal{B}(p_n)$. On définit la suite de variables aléatoires (U_n) par $U_0 = U_1 = 1$ et $U_{n+2} = U_{n+1} + Y_n U_n$.

1. Si $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = +\infty$, alors $U_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} +\infty$;
2. Soit $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ et (a_n) la suite définie par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = f(a_n)$. Si (p_n) est constante égale à $p \in]0; 1[$, alors $\frac{1}{n} \ln(U_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \sum_{i=0}^{+\infty} \ln(a_i)(1-p)p^i$.

[BB24], 25

Remarque : si on n'a pas le temps, on peut supposer la suite constante dès le début.

3.2 Loi des grands nombres.

[CR16], IV.2 et XII.2, [Tou99], IV

~ 6 items.

loi des grands nombres | exemple : Monte-Carlo (| fonction de répartition empirique | théorème de Glivenko-Cantelli | test de Kolmogorov-Smirnov | remarque sur risque d'erreur et la loi de Kolmogorov-Smirnov)

3.3 Théorème central limite.

[CR16], IV.6

~ 3 items.

théorème central limite | corollaire : intervalle de confiance asymptotique | DEV bonus : TCL pour le nombre de cycles d'une permutation tirée uniformément

D2

Théorème. On pose $X^{\overline{n}} := X(X+1) \dots (X+n-1)$. On définit $|s(n, k)|$ les **nombre de Stirling de première espèce non signés** par : $X^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n |s(n, k)| X^k$.

Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\forall n \geq 1$ U_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$. Alors :

1. $\sigma_n := (1 U_1) \circ \dots \circ (n U_n)$ suit la loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$;
2. Soit C_n le nombre de cycles dans la décomposition en cycles à support disjoints de σ_n . Alors,

$$\mathbb{P}(C_n = k) = \frac{|s(n, k)|}{n!} ;$$
3. $\frac{C_n - \ln(n)}{\sqrt{\ln(n)}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$

[GK11], XIV.4.1.292

Remarque : variante du développement sur les nombres de Stirling, qui rentre mieux dans les leçons de probas et la 218 mais pas dans la 190.

Références

- [Tou99] P.S. TOULOUSE. *Thèmes de probabilités et statistique*. DUNOD, 1999. ISBN : 9782100043088.
- [GK11] O. GARET et A. KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités*. ELLIPSES, 2011. ISBN : 9782729870409.
- [CR16] M.L. CHABANOL et J.J. RUCH. *Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques*. ELLIPSES, 2016. ISBN : 9782340013063.
- [App24] W. APPEL. *Mathématiques pour l'agrégation externe. Probabilités*. DEBOECK, 2024. ISBN : 9782807361669.
- [BB24] J. BERNIS et L. BERNIS. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques : 40 développements*. ELLIPSES, 2024. ISBN : 9782340094413.